

SÉRIE A, N° 2208

N° D'ORDRE :

3079

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR **F. BERTEIN**

1^{re} THÈSE. — SUR LES ABERRATIONS GÉOMÉTRIQUES ET LEUR CORRECTION
DANS LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 novembre 1947 devant la Commission d'Examen.

MM. L. DE BROGLIE, *Président.*
LUCAS, } *Examineurs.*
GRIVET, }

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1948

SÉRIE A, N° 2208

N° D'ORDRE :

3079

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR F. BERTEIN

1^{re} THÈSE. — SUR LES ABERRATIONS GÉOMÉTRIQUES ET LEUR CORRECTION
DANS LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 28 novembre 1947 devant la Commission d'Examen.

MM. L. DE BROGLIE, *Président.*

LUCAS, }
GRIVET, } *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1948

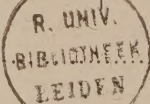
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. J. CABANNES.

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM....	† Botanique.	JACQUES BOURCART.	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. JULIA.....	† Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	M ^{me} JOLIOT-CURIE. †	Physique générale et Radio-activité.
C. MAUGUIN.....	† Minéralogie.	PLANTEFOL.....	† Botanique.
A. DENJOY.....	† Théorie des Fonctions.	CABANNES.....	† Recherches physiques.
L. LUTAUD.....	† Géographie physique et géologie dynamique.	GRASSÉ.....	† Zoologie (Évolution des êtres organisés).
E. DARMOIS.....	† Enseignement de Physique.	PREVOST.....	Chimie organique
ROBERT LÉVY.....	† Physiologie comparée.	BOULIGAND.....	† Application de l'analyse à la Géométrie.
HENRI VILLAT.....	† Mécanique des fluides et applications.	CHAUDRON.....	† Chimie.
CH. JACOB.....	† Géologie.	WYART.....	Minéralogie.
P. PASCAL.....	† Chimie générale.	TEISSIER.....	† Zoologie.
M. FRÉCHET.....	† Calcul des probabilités et Physique mathématique.	MANGENOT.....	† Biologie végétale.
M ^{me} RAMART-LUCAS	† Chimie organique.	P. AUGER.....	† Physique quantique et relativité.
H. BÉGHIN.....	† Mécanique physique et expérimentale.	MONNIER.....	Physiologie générale.
FOCH.....	† Mécanique expérimentale des fluides.	PIVETEAU.....	Géologie.
PAUTHENIER.....	† Électrotechnique générale.	ROCARD.....	† Physique.
DE BROGLIE.....	† Théories physiques.	H. CARTAN.....	Calcul différentiel.
JOB.....	† Chimie générale.	SCHAEFFER.....	† Physiologie des fonctions.
PRENANT.....	† Anatomie et Histologie comparées.	LAFFITTE.....	Chimie (P. C. B.).
VILLEY.....	† Mécanique appliquée.	LERAY.....	Mécanique théorique des fluides.
COMBES.....	† Physiologie végétale.	FAVARD.....	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
GARNIER.....	† Géométrie supérieure.	COULOMB.....	† Physique du globe.
PÈRES.....	† Mécanique rationnelle.	M ^{lle} COUSIN.....	Biologie animale (P. C. B.).
HACKSPILL.....	† Chimie minérale.	CHRÉTIEN.....	Analyse et mesures chimiques.
LAUGIER.....	† Physiologie générale.	DRACH.....	Évolution des êtres organisés.
TOUSSAINT.....	† Technique Aéronautique.	CHATELET.....	† Arithmétique et théorie des nombres.
M. CURIE.....	† Physique (P. C. B.).	EPHRUSSI.....	† Génétique.
G. RIBAUD.....	† Hautes températures.	WURMSER.....	† Biologie physico-chimique.
CHAZY.....	† Mécanique analytique.	KASTLER.....	Physique.
H. GAULT.....	† Chimie appliquée.	BAUER.....	† Chimie-Physique.
CROZE.....	† Physique théorique et Physique céleste.	RIVIÈRE.....	Géologie (P. C. B.).
DUPONT.....	† Théories chimiques.	GAUTHERET.....	Biologie Végétale (P. C. B.).
LANQUINE.....	† Géologie structurale et géologie appliquée.	LUCAS.....	Physique.
VALIRON.....	† Calcul différentiel et calcul intégral.	MAX MORAND.....	Physique.
BARRABÉ.....	Géologie structurale et Géologie appliquée.	ARNULF.....	Optique appliquée.
VAVON.....	† Analyse et mesures chimiques.	A. THOMAS.....	Zoologie.
G. DARMOIS.....	† Mathématiques générales.	SOLEILLET.....	Physique.
CHATTON.....	† Biologie maritime.	FORTIER.....	Mécanique expérimentale des fluides.
AUBEL.....	† Chimie biologique.	DANJON.....	† Astronomie.
		FROMAGEOT.....	Chimie Biologique.
		LAPORTE.....	Physique générale et Radio-activité.

Secrétaire..... CH. MONIER



A MA FEMME

A LA MÉMOIRE
DE MON PÈRE

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES ABERRATIONS GÉOMÉTRIQUES

ET

LEUR CORRECTION DANS LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE

SOMMAIRE. — C'est en grande partie à l'optique lumineuse que l'optique électronique doit ses rapides progrès; ses lois et les instruments qui les appliquent mettent bien en évidence le parallélisme exploité au maximum, entre la nouvelle science et son modèle plus ancien. Si une telle façon d'envisager le problème est fructueuse, il importe toutefois de ne pas s'y limiter sous peine de laisser échapper certains aspects importants qui semblent provenir du caractère suivant : les phénomènes électroniques, contrairement à ce que l'on observe chez les phénomènes lumineux, sont sensibles à des facteurs d'action très variés. Les trajectoires n'y présentent pas la rigidité offerte par les rayons ordinaires en dehors des milieux réfringents; elles sont modifiées par les champs électromagnétiques en raison de la nature même des particules qui les définissent.

Les lentilles, de leur côté, ne jouissent pas de l'immuabilité des lentilles de verre; elles sont sensibles aux fluctuations des tensions ou des intensités de courant qui leur sont fournies. Il existe, d'autre part, des imperfections négligeables chez le microscope optique (défauts de forme des lentilles, etc.), mais qu'on ne pourra considérer comme telles chez l'instrument électronique : l'existence même de la très grande finesse de résolution de ce dernier, conduit nécessairement à être beaucoup plus exigeant à son égard.

On voit ainsi, que d'une façon générale, les instruments électroniques sont sujets à des sources d'aberrations sensiblement plus nombreuses que les appareils d'optique classiques. Mais on peut dire également qu'ils présentent une souplesse plus grande et l'on peut construire de façon simple, des systèmes dont les équivalents en verre seraient irréalisables.

L'étude actuelle envisagera ces aspects originaux de l'optique électronique. Nous prendrons le cas des systèmes centrés, c'est-à-dire présentant en principe, une symétrie de révolution autour d'un axe. Après avoir rappelé tout d'abord la structure générale du champ électromagnétique statique, nous chercherons à voir comment se reflètent les imperfections de l'instrument sur le champ résultant. Les lois des trajectoires électroniques nous fourniront alors les aberrations optiques du système et montreront également la possibilité de corriger ces dernières, du moins en partie.

PLAN.

Introduction. Structure des champs statiques.

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires des champs électromagnétiques statiques φ dans le vide; il est commode d'adopter des coordonnées cylindriques (r, θ, z) sous la forme (s, z) où $s = re^{i\theta}$ représente l'affixe des points dans les plans transversaux. On souligne, en premier lieu, la décomposition de φ en fonctions élémentaires sinusoïdales en θ , de divers ordres de symétrie

autour de Oz [éq. (1)], la connaissance de chacune d'elles étant équivalente à celle d'une certaine fonction $\Phi_m(z)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) [éq. (4)].

Les questions d'ordre de symétrie m autour de Oz présentent une grande importance dans la suite; il en est de même de l'ensemble des fonctions $\Phi_m(z)$ que l'on désignera par « composantes ».

On peut citer certains systèmes d'électrodes désignés sous le nom de systèmes en étoile : ils réalisent des champs d'ordres de symétrie donnés et facilement réglables, utilisés dans la deuxième partie.

1. Écarts géométriques et leur répercussion sur le champ des systèmes.

En supposant connue la distribution du potentiel ψ dans un instrument d'optique « idéal » Σ_0 , on étudie celle $\psi + \varphi$ qui règne dans l'instrument « réel » Σ . On cherche à cet effet à déterminer le terme correctif φ en fonction des défauts, principalement des écarts d'ordre géométrique δ caractéristiques de Σ . La relation $\varphi(\delta)$ est très simple [éq. (20)] dans le cas électrique, et tout à fait analogue [éq. (24)] dans le cas magnétique. Elle montre que les symétries m du défaut δ se reportent sur φ . En particulier un défaut d'ordre $m = 2$ (ellipticité des électrodes) donne naissance à un champ dont la suite met en évidence l'importance optique.

La relation (20) entre φ et δ peut se résoudre dans des cas simples à l'aide de combinaisons linéaires de fonctions potentiel particulières (28); le problème est traité complètement pour une lentille électrostatique à ellipticité et conduit à la solution (36), (37).

2. Aberrations optiques des systèmes centres perturbés.

En appelant φ le potentiel supposé connu de l'instrument réel Σ , on en déduit à la manière classique l'équation générale (41) des trajectoires $s(z)$ au voisinage de Oz , équation unique dans le système de coordonnées (s, z) .

On suppose d'abord le champ purement électrique; l'équation (41) s'écrit, sous une forme (42) faisant apparaître des termes infiniment petits, fonctions des diverses composantes du champ Φ_m ; seules les toutes premières de ces composantes interviennent.

L'équation (41) peut se résoudre en deux approximations. La première (Gauss) considère seulement les termes analytiques et de degré zéro ou 1 en s ; elle conduit à des propriétés de focalisation : Φ_0 fixe la position des plans conjugués, Φ_1 introduit une déviation par rapport à Oz .

La deuxième approximation conduit à l'existence d'aberrations exprimées par la relation générale (49).

En général, les symétries d'ordre $m > 2$ n'interviennent pas et les aberrations se ramènent aux types classiques : distorsion, etc., sphéricité; toutefois, elles ne présentent pas ici la symétrie axiale. Elles se traduisent pratiquement par deux caractéristiques importantes : déformation de l'image Δ [éq. (60)] et limite de résolution ω [éq. (61)] en chaque point.

Les aberrations dues à l'ordre $m = 2$, c'est-à-dire à l'ellipticité des électrodes sont les plus importantes; elles comprennent un astigmatisme et une distorsion constants dans le plan objet. On en calcule la limite ω [éq. (67)] pour la lentille électrostatique déjà envisagée.

Les observations sont analogues dans le cas où l'instrument Σ comporte un champ magnétique; les défauts optiques conduisent encore ici aux types classiques.

3. Correction d'aberrations.

On a vu, dans les trois premières parties, comment les composantes des divers ordres de symétrie du champ créent des aberrations optiques supplémentaires, ces composantes $\Phi_m(z)$ étant dues aux défauts, principalement aux écarts géométriques présentés par Σ . On peut, en revanche, introduire dans l'instrument des champs de composantes $F_m(z)$ telles que les nouvelles aberrations ainsi provoquées annulent les premières, ou du moins les réduisent en grande partie : les systèmes Σ' d'électrodes (ou d'aimants) correspondants seront dits correcteurs.

On étudie d'abord la correction relative à l'astigmatisme d'ellipticité, en raison de l'importance de ce dernier. Des propriétés géométriques simples conduisent à une méthode commode utilisant deux électrodes portées à deux tensions distinctes; une application numérique fournit des ordres de grandeur.

Les propriétés des systèmes Σ' en général sont ensuite examinées en vue de leur application à la réduction des défauts optiques quelconques. On se borne aux systèmes Σ' dont l'emploi est le plus naturel, à savoir ceux disposés à l'extérieur des lentilles et dont l'effet sur les trajectoires n'est que correctif (champ global associé relativement faible). Le calcul montre que leurs effets optiques se réduisent pratiquement aux suivants : une déviation des faisceaux (effet de prisme de petit angle), un astigmatisme et une distorsion constants pour l'ensemble du plan objet. Divers montages d'électrodes (ou d'aimants) en particulier ceux en étoile, réalisent de telles actions arbitrairement réglables.

On montre alors comment ces Σ' permettent la correction des aberrations du microscope et comment, d'un point de vue un peu différent ils peuvent être employés dans les appareils comportant un miroir électronique.

Le résultat optimum que l'on puisse atteindre à l'aide de ces systèmes correcteurs est le suivant : seules subsistent les aberrations relatives à l'instrument idéal Σ_0 qui, elles, sont irréductibles.

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE.

STRUCTURE DES CHAMPS STATIQUES.

1. Rappel des propriétés générales de répartition des potentiels statiques.

LES COMPOSANTES D'ORDRE m PAR RAPPORT A L'AXE Oz . — Étant donné un champ électrique ou magnétique statique dans le vide, φ désignera le *potentiel correspondant* (scalaire ou vecteur s'il s'agit d'un champ magnétique). Nous allons exprimer φ sous une forme mettant en évidence différents ordres de symétrie m par rapport à un axe Oz . Ces symétries présentent par la suite une grande importance; elles sont d'une part conditionnées par les défauts de l'instrument Σ créateur du champ; elles exercent, d'autre part, des actions caractéristiques dans l'optique de Σ .

L'espace sera rapporté à un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour de l'axe Oz ; il sera commode de remplacer les deux variables réelles r et θ par une seule variable complexe qui sera l'affixe des points, dans les plans perpendiculaires à Oz jouant le rôle de plans variables complexes

$$s = r e^{i\theta} = x + iy,$$

x et y désignant les coordonnées cartésiennes associées à r et θ .

Faisons apparaître tout d'abord le développement de φ en série de Fourier par rapport à l'angle θ :

$$(1) \quad \varphi(r, \theta) = \sum_0^{\infty} \varphi_m(r, z) \cos m\theta + \varphi'_m(r, z) \sin m\theta.$$

Cette relation met en évidence des *composantes de φ sinusoïdales par rapport à θ et de symétries de répétition, d'ordre $m = 0, 1, 2, \dots$ autour de Oz ; chacune vérifie l'équation de Laplace ainsi que le montre l'expression de cette dernière en coordonnées cylindriques.*

Les divers termes $\varphi_m \cos m\theta$, $\varphi'_m \sin m\theta$ seront désignés brièvement par potentiels composants ou *composantes d'ordre m* ; le premier, $\varphi_0(r, z)$ est de révolution.

EXPRESSION DE $\varphi(r, \theta)$ AU VOISINAGE DE L'AXE Oz . FONCTIONS $\Phi_m(z)$. — Nous développons φ dans la région de l'axe Oz en raison du rôle joué par cette région dans les propriétés optiques. La fonction de notre problème ne comporte pas de singularités et

peut s'exprimer par une série en x et y , c'est-à-dire, en s et $(\bar{s}$ (s conjugué)), soit

$$(2) \quad \varphi(r, \theta) = \sum_{h, l=0}^{\infty} \alpha_{hl}(z) s^h \bar{s}^l.$$

Nous obtenons la forme générale de cette série en exprimant qu'elle obéit à l'équation de Laplace, c'est-à-dire, dans le système des variables $s, \bar{s}, z$, à

$$\left(4 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \bar{s}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi = 0.$$

Il en résulte une formule de récurrence simple les coefficients

$$4hl\alpha_{hl} = -\alpha_{h-1, l-1}^2.$$

en convenant de *représenter les ordres de dérivation par des indices supérieurs*.

Supposons d'abord $h \geq l$; on voit que les α_{hl} se déduisent des coefficients α_{h-l} par

$$\alpha_{hl} = (-1)^l \frac{(h-l)!}{2^{2l} h! l!} \alpha_{h-l}^{2l},$$

ou, si l'on pose

$$\alpha_{h-l}^{2l} = \frac{\Phi_{h-l}^{2l}}{2^{h-l} (h-l)!},$$

$$\alpha_{hl} = \frac{(-1)^l}{2^{h+l} h! l!} \Phi_{h-l}^{2l}(z).$$

Pour $h < l$, les α_{hl} se ramènent aux α_{lh} en vertu de la réalité de l'expression (2)

$$\alpha_{hl} = \bar{\alpha}_{lh}.$$

On pourra les écrire sous la même forme, à condition de poser

$$(3) \quad \Phi_{h-l}^{2l} = (-1)^{l+h} \bar{\Phi}_{l-h}^{2h}$$

et le développement général des potentiels φ est ainsi

$$(4) \quad \varphi(r, \theta) = \sum_{h, l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{h+l} h! l!} \Phi_{h-l}^{2l}(z) s^h \bar{s}^l.$$

Il fait intervenir une suite de *fonctions $\Phi_m(z)$ ($m \geq 0$) arbitraires et indépendantes et leurs dérivées successives $\Phi_m^n(z) = \frac{d^n \Phi_m}{dz^n}$* ; les fonctions d'indice inférieur négatif s'y ramenant à l'aide de (3).

La connaissance du champ est équivalente à celle des quantités $\Phi_0(z), \Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z), \dots$

On aura par exemple, en se limitant au 4^e ordre, en r ,

$$(5) \quad \varphi(rz\theta) = \Phi_0 + \frac{1}{2}(\Phi_1 s + \overline{\Phi_1 s}) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\Phi_2 s^2 - \Phi_0^2 s s + \frac{1}{2}\overline{\Phi_2 s^2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}\Phi_3 s^3 - \frac{1}{2}\Phi_1^2 s^2 s - \frac{1}{2}\overline{\Phi_1^2 s^2 s} + \frac{1}{6}\overline{\Phi_3 s^3}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{24}\Phi_4 s^4 - \frac{1}{6}\Phi_2^2 s^3 s + \frac{1}{4}\Phi_0^4 s^2 s^2 - \frac{1}{6}\overline{\Phi_2^2 s^3 s} + \frac{1}{24}\overline{\Phi_4 s^4}\right) + \dots$$

Les fonctions $\Phi_m(z)$, pour $m \geq 1$ sont complexes; on a, pour chacune, une représentation graphique toute naturelle si l'on considère la famille de vecteurs définis dans chacun des plans perpendiculaires à Oz, par les affixes $\Phi_m(z)$.

On notera que cette famille de vecteurs ne présente aucun caractère intrinsèque; elle dépend du plan choisi pour origine de l'angle θ ; ce qui revient au même, si l'on fait tourner le champ autour de Oz, elle n'est pas entraînée par la même rotation. Il est facile de voir, en effet, que si le champ tourne de l'angle α autour de l'axe, $\Phi_m(z)$ est multiplié par $e^{-im\alpha}$, autrement dit, la représentation vectorielle correspondante tourne de $(-m\alpha)$.

Si l'on regarde maintenant comment se répartit le développement (4) entre les diverses composantes d'ordre m , on observe aisément que chaque fonction $\Phi_m(z)$ (ainsi que ses dérivées et conjuguées) détermine les composantes de même ordre m : $\varphi_m \cos m\theta$ et $\varphi'_m \sin m\theta$.

Les degrés en r des termes de chacune de ces composantes étant $h+l$, où h et l sont ≥ 0 et $|h-l| = m$, on voit qu'ils constituent la suite des nombres de même parité: $m, m+2, m+4, \dots$; toute composante d'ordre m est d'ordre infinitésimal r^m au voisinage de Oz; les premiers termes de φ_m et Φ'_m étant

$$(6) \quad \varphi_m(rz) = \frac{1}{2^m m!} (\Phi_m + \overline{\Phi_m}) r^m + \dots$$

$$\varphi'_m(rz) = \frac{i}{2^m m!} (\Phi_m - \overline{\Phi_m}) r^m + \dots$$

Pour des raisons de simplicité, la dénomination de composantes d'ordre m sera étendue aux fonctions $\Phi_m(z)$ elles-mêmes.

EXPRESSION DE $\varphi(rz\theta)$ A L'INFINI. — Prenons le système de coordonnées polaires (ρ, τ) de centre O, d'axe polaire Oz, τ étant l'angle de la direction,

défini à partir de l'axe polaire; la résolution de l'équation de Laplace avec ces variables fournit comme expression générale de φ un développement qui, identifié à (1) donne la structure suivante pour les φ_m et les φ'_m dans le cas où ils s'annulent à l'infini (c'est le cas rencontré par la suite)

$$\varphi_m(rz) = \sum_{n \geq m} \frac{a_{nm}}{\rho^{n+1}} P_n^m(\cos \tau),$$

$$\varphi'_m(rz) = \text{expression analogue.}$$

la notation $P_n^m(x)$ étant celle des fonctions sphériques. Plaçons-nous suffisamment loin de l'origine O; les séries précédentes convergent effectivement et sont équivalentes au premier terme, de sorte que l'on peut écrire

$$(7) \quad \varphi_m(rz) = \frac{b_m}{\rho^{m+1}} \sin^m \tau + \dots$$

(L'expression générale de $P_n^m(\cos \tau)$ montre en effet immédiatement que cette fonction est égale à $\sin^m \tau$ à un facteur numérique près).

La relation obtenue indique que les potentiels composants d'ordre m , varient au loin comme $\frac{1}{\rho^{m+1}}$ (ou sont d'ordre infinitésimal supérieur si $b_m = 0$): leur décroissance à l'infini est d'autant plus rapide que m est plus grand.

Une remarque analogue pouvait être faite concernant le voisinage de l'axe Oz, puisque φ_m et φ'_m sont de l'ordre de r^m en vertu de (6): il est possible en conséquence de dire, de façon qualitative que la répartition de champs de symétrie d'ordre m autour de Oz s'étend à partir des électrodes créatrices d'autant moins loin que m est plus grand.

2. Potentiel créé par un système d'électrodes en étoile autour de Oz (1).

Soit tout d'abord le cas électrostatique; la loi de potentiel $\varphi(rz\theta)$, c'est-à-dire l'ensemble des composantes $\Phi_m(z)$ dépendent de la disposition géométrique des électrodes ainsi que des tensions appliquées. S'il arrive que ces données présentent une symétrie de répétition d'ordre M par rapport à Oz, il en est de même de φ : seules sont différentes de zéro les composantes $\Phi_m(z)$ où $m = M, 2M, \dots$; on trouve ainsi les systèmes de révolution pour $M=0$.

Nous nous placerons ici dans un cas un peu plus général, celui où la symétrie de répétition n'existe qu'en ce qui concerne les paramètres géométriques.

(1) Le paragraphe peut être laissé de côté, il ne constitue qu'un exemple d'importance secondaire pour la suite.

On verra que le champ résultant possède encore des propriétés simples : ses diverses composantes sont réglables de façon commode en fonction des tensions appliquées et nous en trouverons des applications par la suite.

Considérons ainsi un système de M électrodes de formes quelconques mais géométriquement identiques et disposées en étoile, c'est-à-dire suivant une symétrie de répétition d'ordre M autour de Oz .

On désigne ces électrodes par

$$A_K (K = 0, 1 \dots M);$$

chacune se déduit de la précédente, A_{K-1} à l'aide d'une rotation d'angle $\alpha = \frac{2\pi}{M}$ autour de Oz . La figure (1) représente un exemple dans lequel $M = 6$.

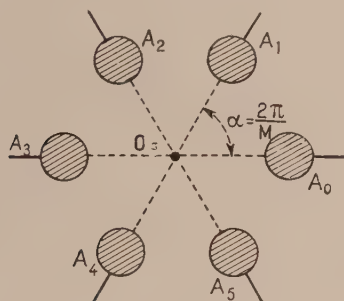


Fig. 1.

CAS OU LE POTENTIEL DE CHAQUE ÉLECTRODE EST UNE FONCTION SINUSOÏDALE DE SA POSITION ANGULAIRE. — Supposons pour commencer, chaque électrode A_K portée à la tension respective :

$$(8) \quad V_K = v \cos(Kp\alpha - \omega),$$

p étant un entier vérifiant sans que cela introduise de restriction : $0 \leq p < \frac{M}{2}$;

v et ω sont deux constantes.

On déterminera la structure du champ résultant φ en faisant appel à des éléments complexes.

a. On imaginera d'abord que les A_K sont portées à des tensions respectives $e^{iKp\alpha}$; soit $\psi(r, z, \theta)$ la distribution de potentiel correspondante.

Multiplions par la constante $e^{ip\alpha}$; on obtient une nouvelle loi de potentiel $\psi e^{ip\alpha}$ dans laquelle A_K est portée à la tension $e^{i(K+1)p\alpha}$, c'est-à-dire à la tension présentée par A_{K+1} dans la répartition ψ ; il en résulte que la fonction $\psi e^{ip\alpha}$ est identique à la fonction ψ tournée de l'angle $-\alpha$:

$$\psi(r, z, \theta) e^{ip\alpha} = \psi(r, z, \theta + \alpha)$$

ce qui impose à la fonction ψ un développement de Fourier par rapport à θ de la forme

$$(9) \quad \psi(r, z, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(r, z) e^{i(p+nM)\theta}.$$

b. Évaluons alors le potentiel créé par les électrodes A_K supposées portées aux tensions respectives $v e^{i(Kp\alpha - \omega)}$; on le forme à partir du précédent par multiplication par $v e^{-i\omega}$ c'est donc :

$$v e^{-i\omega} \psi(r, z, \theta).$$

Si enfin, nous prenons les parties réelles des quantités précédentes, nous obtenons une réponse au problème envisagé : les potentiels $v \cos(Kp\alpha - \omega)$ appliqués aux A_k créent la distribution

$$\varphi = \mathcal{R}[v e^{-i\omega} \psi(r, z, \theta)]$$

c'est-à-dire d'après (9)

$$(10) \quad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [v e^{-i\omega} f_n e^{i(p+nM)\theta} + v e^{i\omega} \bar{f}_n e^{-i(p+nM)\theta}].$$

Le potentiel φ est formé uniquement de composantes d'ordres de symétrie $m = |p + nM|$, c'est-à-dire

$$(11) \quad m = p, \quad (M-p), \quad (M+p), \quad (2M+p), \quad \dots,$$

Cette liste est ordonnée suivant les valeurs croissantes : l'ordre de symétrie minimum figurant dans φ est $m = p$. Déterminons d'autre part la façon dont les composantes $\Phi_m(z)$ de φ dépendent des paramètres v et ω . Trois cas sont à considérer à cet effet.

PREMIER CAS : $p \neq 0, \frac{M}{2}$. — Les exposants figurant dans le développement (10) sont alors tous différents de sorte qu'il est impossible de faire fusionner certains termes de cette série; par identification avec la relation générale (4), on en déduit la forme des fonctions $\Phi_m(z)$:

$$(12) \quad \Phi_m(z) = \begin{cases} v e^{-i\omega} u_m(z) & \text{si } m = p, M+p, 2M+p, \dots \\ v e^{i\omega} u_m(z) & \text{si } m = M-p, 2M-p, \dots \end{cases}$$

$u_m(z)$ ne dépendant ni de v , ni de ω , c'est-à-dire fonction seulement des paramètres géométriques du système d'électrodes.

DEUXIÈME CAS : $p = 0$. — Les électrodes sont toutes à la tension $v \cos \omega$ d'où résulte immédiatement que $\Phi_m(z)$ est proportionnel à $v \cos \omega$:

$$(13) \quad \Phi_m(z) = v \cos \omega u_m(z), \quad (m = 0, M, 2M, \dots).$$

TROISIÈME CAS : $p = \frac{M}{2}$ (ce n'est possible que pour un nombre M pair d'électrodes). — On remarque que les tensions des A_K s'écrivent alors $(-1)^K v \cos \omega$ et l'on trouve ainsi la même proportionnalité à $v \cos \omega$:

$$(14) \quad \Phi_m(z) = v \cos \omega u_m(z), \quad \left(m = \frac{M}{2}, \frac{3M}{2}, \frac{5M}{2}, \dots \right).$$

CAS GÉNÉRAL. — Les tensions appliquées aux électrodes sont quelconques. — Soit V_K ces tensions : V_K est une fonction de la variable K prenant une suite discontinue de valeurs; une telle fonction peut toujours s'écrire sous forme d'expression sinusoïdale

$$V_K = \sum_{|p| \leq \frac{M}{2}} v_p \cos(pK\alpha - \omega_p)$$

En vertu des propriétés linéaires du potentiel, nous sommes ainsi ramenés au cas particulier : le potentiel $\varphi(r, z, \theta)$ est égal à la somme de ceux que créerait isolément chaque loi sinusoïdale appliquée aux électrodes.

APPLICATION D'UN SYSTÈME D'ÉLECTRODES EN ÉTOILE A LA RÉALISATION DE CHAMPS POSSÉDANT CERTAINES STRUCTURES. — Étant donné un système en étoile, ce qui précède nous montre de quelle manière on pourra agir sur les composantes des divers ordres du champ en réglant les tensions appliquées aux électrodes. Plus précisément, on pourra agir sur « l'amplitude » (complexe) des composantes $\Phi_m(z)$, non sur leur loi de variation en z elle-même (formules 12, 13, 14).

Les exemples suivants mettent en évidence cette propriété. Appliquons aux électrodes, les tensions respectives

$$(15) \quad V_K = v_0 + v_1 \cos(K\alpha - \omega_1) + v_2(2K\alpha - \omega_2).$$

Divers cas sont à envisager en ce qui concerne le nombre M d'électrodes

a. Cas $M = 5$. — On peut indiquer dans un tableau les ordres de symétrie présents dans le champ en vertu de chacun des trois termes du deuxième membre de (15) (formule 11)

Termes présents dans V_K .	Ordres de symétrie m , présents dans les champs associés.
$(p=0) \quad v_0, \dots$	$0 \dots 5 \dots 10 \dots$
$(p=1) \quad v_1 \cos(K\alpha - \omega_1), \dots$	$1 \dots 4 \dots 6 \dots 9 \dots 11 \dots$
$(p=2) \quad v_2 \cos(2K\alpha - \omega_2), \dots$	$2 \dots 3 \dots 7 \dots 8 \dots 12 \dots$

On voit que le champ résultant présentera dans le cas général des composantes de tous les ordres de symétrie.

Les cinq paramètres $v_0, v_1, \omega_1, v_2, \omega_2$, auront les rôles suivants :

A l'aide de v_0 , on peut régler arbitrairement l'amplitude réelle de $\Phi_0(z)$, et cette variation est accompagnée de celles de $\Phi_5(z), \dots$; la condition $v_0 = 0$ entraîne la nullité de ces fonctions, en particulier celle de $\Phi_0(z)$.

A l'aide de v_1, ω_1 , on peut régler arbitrairement l'amplitude complexe de $\Phi_1(z)$, variation accompagnée de celles de $\Phi_4(z), \dots$; d'après (12) ces fonctions varient proportionnellement à $v_1 e^{-i\omega_1}, v_1 e^{i\omega_1}$ respectivement; la condition $v_1 = 0$ entraîne leur nullité en particulier celle de $\Phi_1(z)$.

Observations analogues en ce qui concerne $v_2, \omega_2, \Phi_2(z), \Phi_3(z)$.

b. Cas $M > 5$. — Le tableau des ordres de symétrie présents dans le champ est par exemple pour $M = 7$:

Termes présents dans V_K .	Ordres de symétrie m , présents dans les champs associés.
$(p=0) \quad v_0, \dots$	$0 \dots 7 \dots$
$(p=1) \quad v_1 \cos(K\alpha - \omega_1), \dots$	$1 \dots 6 \dots 8 \dots$
$(p=2) \quad v_2 \cos(K\alpha - \omega_2), \dots$	$2 \dots 5 \dots 9 \dots 12 \dots$

Il contient toujours les valeurs 0, 1, 2, mais il offre ensuite des lacunes, d'autant plus étendues que M est plus grand. Les cinq paramètres permettront d'effectuer comme dans le cas $M = 5$, les réglages en amplitude des fonctions $\Phi_0(z), \Phi_1(z), \Phi_2(z)$.

c. Cas $M = 4$. — Tous les ordres de symétrie sont présents dans le champ.

Les paramètres v_0, v_1, ω_1 règlent encore en amplitude les fonctions $\Phi_0(z), \Phi_1(z)$.

Quant au troisième terme de (15), il forme un cas où $p = \frac{M}{2}$: les paramètres correspondants v_2 et ω_2 fusionnent en un seul réel $v_2 \cos \omega_2$ (formule 14) en ce qui concerne leur influence sur $\Phi_2(z)$; autrement dit v_2, ω_2 ne permettent plus ici qu'un réglage de $\Phi_2(z)$ en module; ils ne peuvent agir sur la phase de cette fonction. Cette fusion des deux paramètres v_2 et ω_2 s'accorde avec le fait que le système ne comportant que quatre électrodes, les cinq paramètres $v_0, v_1, \omega_1, v_2, \omega_2$ doivent en fait se réduire à 4.

d. Cas $M < 4$. — Le troisième terme de (15) correspond à $p = 2 > \frac{M}{2}$. Conformément à une observation du début il est équivalent à un terme $p < \frac{M}{2}$.

Effectivement, si l'on prend $M = 3$, par exemple, l'expression

$$v_2 \cos\left(2K \frac{2\pi}{3} - \omega_2\right)$$

peut s'écrire

$$v_2 \cos \left(K \frac{2\pi}{3} + \omega_2 \right)$$

c'est-à-dire fusionne avec celle en v_1 .

Autrement dit, l'on est ramené à une expression (15) à deux termes seulement. Le tableau des ordres de symétrie est alors, toujours pour $M = 3$.

Termes présents dans V_K .	Ordres de symétrie m , présents dans les champs associés.
($p = 0$) $v_0 \dots \dots \dots$	0 . . 3 . . 6 .
($p = 1$) $v_1 \cos(K\alpha - \omega_1)$.	. 1 2 . 4 5 . 7 . .

On voit que l'on peut régler à l'aide de v_1, ω_1 , les amplitudes de $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, mais de façon indissociable l'une de l'autre.

D'une manière générale, ce qui précède nous conduit à la conclusion suivante :

Étant donné un système de M électrodes en étoile, si $M \geq 2n + 1$ et seulement dans ce cas, ce système est susceptible de fournir un champ dont les amplitudes complexes des $(n + 1)$ premières composantes $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, ..., $\Phi_n(z)$ sont réglables arbitrairement et indépendamment : il suffit d'appliquer les tensions respectives :

$$(16) \quad V_K = \sum_{p=0}^n v_p \cos(p K \alpha - \omega_p),$$

$\Phi_p(z)$ varie comme $v_p e^{-i\omega_p}$.

Remarque. — Les propriétés que nous avons obtenues concernant le champ des systèmes en étoile, ne supposent pas que ces systèmes soient immergés dans une région vide de champ : elles nécessitent seulement qu'ils soient placés dans un champ pré-existant, nul ou non, mais créé par des électrodes de révolution, c'est-à-dire, dans un système centré, l'axe de l'étoile coïncidant avec l'axe de révolution.

CAS PARTICULIER DES SYSTÈMES A ÉLECTRODES PONCTUELLES. — L'étude de ce type qui est le plus simple précisera l'allure des champs et des diverses fonctions $\Phi_m(z)$. Nous prenons M électrodes $A_0, \dots, A_{K-1}$, sphériques, de rayon ρ , et situées à distance a de l'axe Oz .

Leurs azimuts seront

$$(17) \quad \theta_K = \frac{2K\pi}{M}$$

ρ est supposé assez petit vis-à-vis des autres dimensions linéaires pour que les phénomènes d'influence électrique entre les diverses électrodes soient négligeables. Dans ces conditions, chaque sphère portée à la tension V_k prend une charge $Q_k = \rho V_k$ (unités

E S C G S) qui apparaît comme étant localisée en son centre.

Calculons les premiers termes du développement du champ à l'extérieur lorsque les V_k sont donnés par (8)

$$V_K = v \cos(Kp\alpha - \omega),$$

où

$$\alpha = \frac{2\pi}{M}$$

c'est-à-dire

$$Q_K = q \cos(Kp\alpha - \omega) \quad \text{avec} \quad q = \rho v.$$

Nous commençons par déterminer le potentiel créé par une seule électrode, soit A_1 (fig. 2) :

$$\psi_1 = \frac{Q_1}{|AM|} = Q_1 [z^2 + a^2 - a(s e^{-i\theta_1} + \bar{s} e^{i\theta_1}) + s\bar{s}]^{-\frac{1}{2}}.$$

Le développement de cette quantité par rapport aux puissances de s et $\bar{s}$, identifié avec la structure

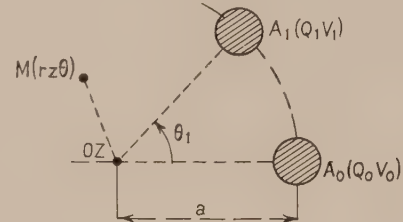


Fig. 2.

générale (4), fournit les valeurs suivantes pour les premières composantes que nous noterons $\Psi_m(z)$

$$\begin{aligned} \Psi_0(z) &= Q_1 (z^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ \Psi_1(z) &= a Q_1 (z^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-i\theta_1}, \\ \Psi_2(z) &= 3 a^2 Q_1 (z^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} e^{-2i\theta_1}. \end{aligned}$$

Les potentiels créés par les autres sphères A_K auraient des expressions analogues de sorte que les composantes $\Phi_m(z)$ du potentiel φ créé par le système total sont, en remplaçant θ_K et V_K par leurs valeurs (17) et (8) :

$$\Phi_0(z) = q (z^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{K=0}^{M-1} \cos \left(K \frac{2p\pi}{M} - \omega \right),$$

$$\Phi_1(z) = a q (z^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} \sum e^{-i \frac{2K\pi}{M}} \cos \left(K \frac{2p\pi}{M} - \omega \right),$$

$$\Phi_2(z) = 3 a^2 q (z^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} \sum e^{-i \frac{4K\pi}{M}} \cos \left(K \frac{2p\pi}{M} - \omega \right).$$

L'évaluation de $\Phi_0(z)$ s'obtient immédiatement

$$\Phi_0(z) \begin{cases} \equiv 0 & \text{si } p \neq 0. \\ = M (z^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} q \cos \omega & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Celle des deux autres fonctions demande la transformation d'expressions du type

$$\sum_{K=0}^{M-1} x^K \cos(Kp\alpha - \omega)$$

dont nous rappellerons le calcul :

on suppose d'abord x réel : la quantité précédente apparaît comme étant la partie réelle d'une expression complexe

$$\Re \left[e^{-i\omega} \sum_{K=0}^{M-1} (x e^{ip\alpha})^K \right]$$

qui est aisément calculable; on trouve ainsi

$$\sum_{K=0}^{M-1} x^K \cos(Kp\alpha - \omega) = \frac{\left\{ x^M \left\{ x \cos[(M-1)p\alpha - \omega] - \cos(Mp\alpha - \omega) \right\} - x \cos(p\alpha + \omega) + \cos \omega \right\}}{(x - e^{ip\alpha})(x - e^{-ip\alpha})}.$$

Les deux membres étant fonctions analytiques de x , la relation est encore valable pour x complexe. Il ne reste plus qu'à y remplacer x et α par leurs valeurs :

$$\alpha = \frac{2\pi}{M}, \quad x = \begin{cases} e^{-\frac{2\pi i}{M}} & \text{dans } \Phi_1(z), \\ e^{-\frac{4\pi i}{M}} & \text{dans } \Phi_2(z). \end{cases}$$

Le tableau suivant résume les résultats pour $p = 0, 1, 2$ et pour $M \geq 5$ (nombre permettant le réglage des amplitudes de Φ_0, Φ_1, Φ_2)

p .	Q_K .	$\Phi_0(z)$.	$\Phi_1(z)$.	$\Phi_2(z)$.
0.....	$q \cos \omega$	$M(z^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} q \cos \omega$	0	0
1.....	$q \cos \left(\frac{2K\pi}{M} - \omega \right)$	0	$\frac{Ma}{2} (z^2 + a^2)^{-\frac{3}{2}} q e^{-i\omega}$	0
2.....	$q \cos \left(\frac{4K\pi}{M} - \omega \right)$	0	0	$\frac{3Ma^2}{2} (z^2 + a^2)^{-\frac{5}{2}} q e^{-i\omega}$

On remplacera les considérations de charges par celles de potentiels des électrodes en remplaçant q par ρv dans les trois dernières colonnes. Sans revenir sur la dépendance des fonctions vis-à-vis des paramètres v et ω , conformes à l'étude des systèmes en étoile généraux, observons que le nombre M d'électrodes ($M \geq 5$) a un simple rôle de proportionnalité : les composantes du champ d'ordre 0, 1, 2, varient proportionnellement à M .

L'étude préalable montre de plus que la suite des ordres des composantes présente après $m = p$, une lacune d'autant plus étendue que M est plus grand. A la limite pour M infiniment grand, seul existe dans le champ l'ordre de symétrie $m = p$; le système se présente alors sous la forme d'un cercle linéairement électrisé dont l'étude se retrouvera plus loin.

Si l'on veut réaliser des systèmes réels auxquels le calcul précédent s'applique avec une bonne approximation, on prendra d'abord des électrodes sphériques, présentant des rayons de longueur plus faible que les distances mutuelles : les phénomènes d'influence seront secondaires. Ces électrodes seront d'autre part fixées à l'extrémité de tiges suffisamment fines (fig. 1); les charges portées par ces tiges en vertu des tensions appliquées resteront assez petites et leur répercussion sur le potentiel au voisinage de l'axe sera négligeable. De plus, le système sera placé dans une région de champ pratiquement nul, à l'intérieur par exemple d'un blindage électrostatique, de rayon sensiblement supérieur à a , de façon à éviter ici encore l'apparition de phénomènes d'influence.

SYSTÈMES MAGNÉTIQUES EN ÉTOILE. — On obtient des résultats analogues aux précédents si l'on envisage la distribution du champ magnétique créé par les systèmes magnétiques en étoile. Ces derniers seront formés de M aimants géométriquement identiques et disposés suivant une symétrie de répétition d'ordre M autour de Oz .

Par le terme aimant, il faudra entendre ici tout assemblage de circuits et de noyaux magnétiques.

Une telle étoile pourra être placée dans le champ magnétique d'un système centré à conditions que les axes coïncident. La figure 3 fournit le schéma d'une réalisation possible avec $M = 6$.

E est l'enceinte du système centré; T un tube assurant le blindage magnétique vis-à-vis des perturbations extérieures.

Si nous supposons que les éléments magnétiques intervenant dans le montage ont des perméabilités

constantes, du moins dans les limites d'utilisation, il est possible d'obtenir des résultats équivalents à ceux des étoiles électriques. En effet, le problème est alors linéaire; si les diverses bobines B_k sont alimentées par les courants respectifs

$$I_k = I \cos(K\rho\alpha - \omega)$$

(I et ω constantes), les mêmes raisonnements sont applicables et conduisent aux mêmes conclusions

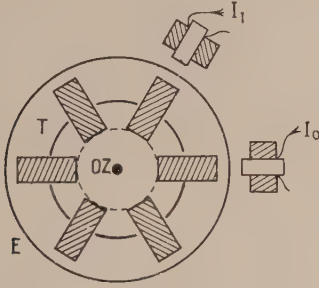


Fig. 3.

(formules 11, 12, 13, 14) à condition de considérer les courants I_k au lieu des potentiels V_k et $\varphi(rz, 0)$ désignant maintenant le potentiel scalaire magnétique.

De là découlent les mêmes possibilités de réalisation et de réglage de champs magnétiques possédant certaines structures.

L'équivalent magnétique du système à électrodes ponctuelles est ici celui à pôles magnétiques ponctuels réalisable dans la mesure où les masses magnétiques d'un barreau sont localisées dans une région de faibles dimensions (métal de grande perméabilité). Le tableau (18) fournit les premiers coefficients du développement du potentiel correspondant, Q_k désignant ici les masses magnétiques des pôles, reliables avec une plus ou moins bonne approximation aux courants magnétisants I_k .

CHAPITRE PREMIER.

LES ÉCARTS GÉOMÉTRIQUES ET LEURS RÉPERCUSSIONS SUR LE CHAMP DES SYSTÈMES.

3. Nous nous limitons par la suite aux systèmes centrés; étant donné un tel système effectivement réalisé, soit Σ , il présente divers écarts vis-à-vis de l'instrument idéal Σ_0 que l'on désirait construire. Nous étudierons particulièrement le cas des écarts « géométriques » c'est-à-dire résidant dans le fait que les surfaces S des électrodes réelles ne sont pas rigoureusement confondues avec celles S_0 des électrodes de Σ_0 (positions imparfaites, défauts de

centrage, formes défectueuses). D'autres perturbations proviennent d'irrégularités de la masse même des pièces (manque d'homogénéité chez les matériaux magnétiques), d'autres des fluctuations des potentiels d'électrodes ou d'intensités des courants magnétisants, d'autres enfin des champs parasites.

D'une façon générale nous appellerons $\psi(rz, 0)$, la répartition du potentiel du champ qui s'exercerait dans le système idéal Σ_0 ; le terme « écart » représentera toute influence supposée faible modifiant le champ, qu'elle soit indépendante de la volonté de l'opérateur, ou au contraire provoquée à dessein. On notera $\psi + \varphi$, la loi de potentiel du système ainsi perturbé Σ . φ est l'élément perturbateur traduisant l'existence de l'écart.

Certaines perturbations peuvent être variables dans le temps (dilatations thermiques, vibrations, résidus de champs alternatifs). On supposera toutefois les équations des champs statiques applicables à chaque instant, d'où la nécessité que les variations ne soient pas trop rapides, plus précisément que les longueurs d'ondes électromagnétiques résultantes soient sensiblement supérieures aux dimensions de l'instrument.

Le potentiel correctif obéira ainsi à l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$. Sa présence dans le système Σ agit sur la structure des faisceaux électroniques en créant des aberrations nouvelles ou en modifiant celles propres à Σ_0 ; ce sont ces modifications que l'on se propose d'étudier.

ÉCARTS GÉOMÉTRIQUES δ . LEURS COMPOSANTES DE DIVERSES SYMÉTRIES PAR RAPPORT A OZ. — On estimera l'écart géométrique présenté par S par la connaissance en tout point de la distance de S_0 à S , soit $\delta(rz, 0)$ (fig. 4 a); on pourra désigner

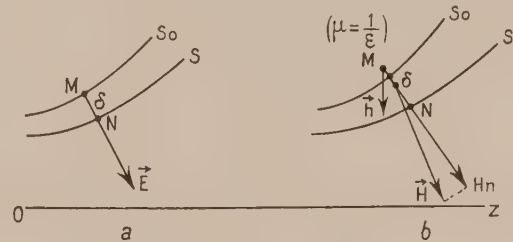


Fig. 4.

brèvement l'écart par δ , sans oublier toutefois que cette notation représente une fonction et non un nombre unique. Cette fonction doit être considérée comme ayant un sens algébrique; on la comptera positivement dans le sens de la demi normale extérieure à S_0 .

Nous mettrons d'abord en évidence pour δ , ainsi qu'on l'a fait pour φ , son développement en série de Fourier, en fonction de l'angle θ :

$$(19) \quad \delta(z, \theta) = \sum_0^{\infty} \delta_m(z) \cos m\theta + \delta'_m(z) \sin m\theta.$$

On fait apparaître ainsi diverses composantes sinusoïdales et de symétries de répétition d'ordres $m = 0, 1, 2, \dots$, autour de Oz .

Les écarts étant toujours supposés petits, si S se déduit de S_0 par une somme de diverses transformations géométriques (déplacements, déformations), le $\delta(z, \theta)$ représentatif est égal à la somme des δ associés à chaque transformation envisagée isolément. On peut d'ailleurs se donner, au lieu de la distance véritable δ , la distance $d(z, \theta)$ comptée suivant l'une des coordonnées : radiale suivant r , axiale suivant z : l'on a pour $d(z, \theta)$, un développement correspondant terme à terme à celui (19) de $\delta(z, \theta)$. Montrons que dans ces conditions, les éléments sinusoïdaux obtenus présentent une signification physique importante.

a. Termes $m = 0$ et 1. — Le premier $m = 0$, étant indépendant de θ , conserve la symétrie de révolution autour de Oz et inversement : on l'observe par exemple si S se déduit de S_0 par une translation suivant Oz ou une homothétie centrée sur cet axe.

En ce qui concerne les composantes $m = 1$, elles s'expriment par $d = d'' \cos(\theta - \theta_1)$; en vertu de leur existence, les sections des S par des plans perpendiculaires à Oz sont circulaires et identiques à celles de S_0 , mais décalées d'une quantité $d''(z)$ suivant la direction $\theta_1(z)$.

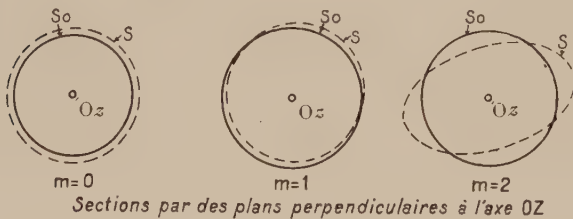


Fig. 5.

Supposons que l'écart consiste en de simples décentrages des électrodes; les S se déduisent des S_0 par des déplacements; il n'existe que des termes $m = 0$ et 1. L'on voit en effet que la distance axiale d entre S_0 et S est alors fonction linéaire des coordonnées cartésiennes et par suite de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. En définitive, chaque fois que les électrodes S se déduisent de S_0 par des déformations conservant leur

symétrie de révolution et par des décentrages, $\delta(z, \theta)$ ne renferme que des composantes $m = 0$ et 1.

b. Termes $m \geq 2$. — Les composantes $m = 2$ s'écrivent par exemple :

$$d = d'' \cos 2(\theta - \theta_2).$$

Un calcul simple montre qu'elles donnent aux sections de S par des plans normaux à Oz , la forme d'ellipses centrées sur Oz et de même aire que les cercles sections de S_0 .

L'ensemble des défauts $m = 2$ sera dit ellipticité. — Quant aux termes $m > 2$, on voit sans qu'il soit utile d'insister, qu'ils conduisent à des sections de S présentant des ondulations de plus en plus serrées par rapport à la forme circulaire : les défauts représentés sont de plus en plus étroits à mesure que m augmente.

En vertu des observations précédentes, les composantes $m \geq 2$ ne peuvent exister que si les S se déduisent des S_0 par des déformations détruisant leur symétrie de révolution propre. L'usinage des électrodes à l'aide de tours « parfaits » ne les introduirait pas. Le finissage des surfaces à l'aide du polissage électrolytique tend au contraire à provoquer leur existence. On sait, en effet, que ce procédé, à moins d'être appliqué durant un temps très court, crée de légères ondulations superficielles et dont la largeur, c'est-à-dire l'ordre m présente des valeurs diverses.

Certaines de ces ondulations sont très serrées :

La figure 6 montre l'aspect au microscope d'un de leurs types caractéristiques obtenu facilement dans le polissage d'électrodes en acier inoxydable [1]; l'œil ne discerne sur la surface que des irisations dues à une périodicité de structure très grossière. Ces ondulations correspondent à de grandes valeurs de m ; ainsi qu'on le verra leur effet optique est, par suite, nul.

Il n'en est pas de même d'irrégularités beaucoup plus larges apparaissant progressivement en liaison avec les symétries du montage électrolytique; si l'on prend une électrode d'ouverture circulaire plongeant verticalement dans le bain, le polissage confère à cette ouverture une ellipticité parfaitement observable à l'œil au bout de quelques dizaines de minutes. Nous verrons qu'un tel défaut est néfaste à l'optique du système centré bien avant ce stade : il doit être pris en considération, à côté des avantages que procurerait le polissage électrolytique en ce qui concerne la stabilité des électrodes sous haute tension.

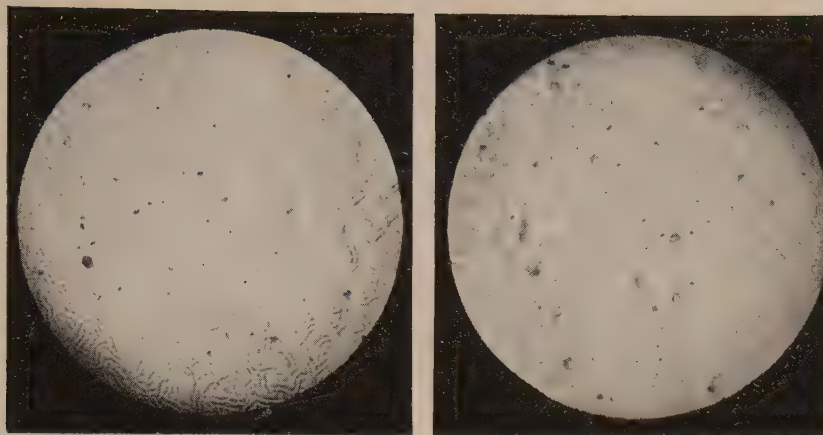


Fig. 6.

4. Relation entre l'écart géométrique δ et le potentiel correcteur associé φ . Propriétés de φ .

Relation (φ , δ) dans le cas électrique. — L'étude de l'influence « optique » de δ exige d'abord la détermination du potentiel correctif créé par δ . Plaçons-nous dans le cas où le champ du système est purement électrique; soit $E(z)$ le champ s'exerçant à la surface de S_0 des électrodes idéales dans Σ_0 , compté algébriquement suivant la convention indiquée pour δ (fig. 4 a).

On obtient la relation cherchée en exprimant que le potentiel en tout point N de S dans Σ est égal au potentiel qui existerait dans le système Σ_0 au point M de S_0 qui lui fait vis-à-vis

$$\psi(N) + \varphi(N) = \psi(M)$$

c'est-à-dire si l'on se limite au premier ordre infinitésimal

$$(20) \quad \boxed{\varphi = E\delta}$$

le long des surfaces S_0 des électrodes.

Cette condition aux limites (remplacée bien entendu par celle de nullité à l'infini dans les régions sans électrodes) permet théoriquement du moins, la détermination sans ambiguïté du potentiel perturbateur φ en fonction de l'écart δ .

Une discussion simple montre que l'approximation réalisée en vue d'obtenir (20) est valable si l'écart entre S_0 et S est petit vis-à-vis des distances à l'axe Oz, petit également vis-à-vis des rayons de courbure des deux surfaces dans la région envisagée.

Remplaçons dans la relation (20) φ et δ par leurs développements (1) et (19); multiplions les deux

membres par $\cos m\theta$, et intégrons par rapport à θ de 0 à 2π ; il reste seulement en vertu de l'orthogonalité des fonctions, pour chaque valeur de m

$$(21) \quad \varphi_m = E\delta_m$$

c'est-à-dire

$$\varphi_m \cos m\theta = E\delta_m \cos m\theta, \quad \text{le long de } S_0.$$

On aurait de même :

$$\varphi'_m \sin m\theta = E\delta'_m \sin m\theta, \quad \text{le long de } S_0.$$

Autrement dit, la relation (20) s'applique successivement et indépendamment aux termes des divers rangs des développements : $\varphi_m \cos m\theta$ (resp. $\varphi'_m \sin m\theta$) est créé par l'écart $\delta_m \cos m\theta$ (resp. $\delta'_m \sin m\theta$) : les symétries de δ se reportent sur le potentiel correcteur associé.

Il en résulte, en raison des relations (6) que le potentiel perturbateur dû aux écarts d'ordre m est de l'ordre infinitésimal r^m au voisinage de Oz; le champ radial correspondant est donc de l'ordre de r pour $m=0$, de $r^0, r, \dots, r^{m-1}$, pour $m=1, 2, \dots, m$.

La répercussion sur l'optique du système fait essentiellement intervenir ce champ. On voit ainsi que des écarts géométriques d'ordres croissants, $m=1, 2, 3, \dots$ apportent aux faisceaux électroniques du système idéal des modifications d'importance de plus en plus faible, si du moins ces écarts sont d'amplitudes comparables.

En fait, les tous premiers ordres interviendront seuls. On ne doit pas perdre de vue, que le report sur φ des symétries de δ n'est valable que pour les petits écarts c'est-à-dire au premier ordre seulement, au même titre que la relation (20).

On le vérifierait facilement sur un cas particulier : soit un système centré idéal dont le potentiel en vertu de (4) présente une expression du type

$$(22) \quad \psi = \Psi_0 - \frac{1}{4} \Psi_0^3 s^2 + \frac{1}{64} \Psi_0^5 s^4 s^2.$$

Soumettons le à la modification géométrique d'ordre $m = 1$ consistant en une translation perpendiculaire à Oz de vecteur représenté par l'afixe e ; la nouvelle distribution de potentiel $\psi + \varphi$ est donnée rigoureusement par (22) où l'on remplace s par $s - e$; on en déduirait l'expression du terme correcteur φ . On verrait ainsi que la partie principale de φ est effectivement d'ordre de symétrie $m = 1$; elle est toutefois accompagnée d'infiniment petits de degré supérieur en e et d'ordres $m > 1$.

CAS DU CHAMP MAGNÉTIQUE. — Prenons le cas où le système centré est à champ magnétique. Par électrodes S_0, S , il faut entendre ici les armatures des bobines magnétisantes, principalement leurs pièces polaires; ψ et $\psi + \varphi$ désignent d'autre part les potentiels scalaires magnétiques du système idéal Σ_0 et du système réel Σ .

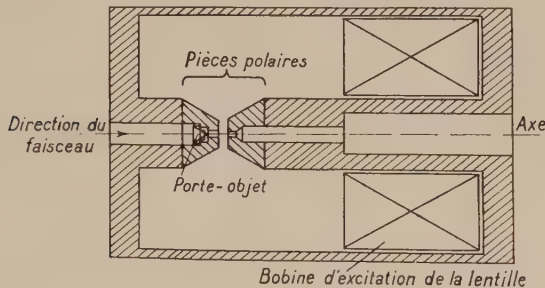


Fig. 7. — Lentille magnétique (d'après von Ardenne).

On sait que de telles fonctions présentent plusieurs déterminations qui toutes, sont constantes à l'infini; leurs variations le long d'un même contour fermé ayant une même valeur proportionnelle au courant encerclé, il en résulte que leur différence φ est une fonction uniforme, et nulle à l'infini au même titre que le terme correcteur électrique. On sait d'autre part, que les cas où la perméabilité magnétique μ des armatures serait infinie offrent une grande analogie avec les phénomènes électriques en présence de conducteurs : ils fourniraient en conséquence des résultats à peu près transposés de ceux que nous venons d'obtenir. On peut penser qu'il en est de même par continuité pour de grandes valeurs de μ et une analyse plus détaillée va le montrer. On supposera la quantité $\varepsilon = \frac{1}{\mu}$ assez petite pour qu'on

néglige par la suite les termes d'ordre supérieur, c'est-à-dire en $\varepsilon^2, \varepsilon^3 \delta \dots$

M et N désigneront encore les points courants de S_0 et S se faisant vis-à-vis; on notera en M dans Σ_0 : $\vec{h}$ le champ magnétique du côté intérieur à l'armature, $\vec{H}$ le champ du côté extérieur, de composante normale H_n (fig. 4 b), h est de l'ordre de ε , puisqu'il s'annule pour $\varepsilon = 0$ ($\mu = \infty$).

Si l'on passe de Σ_0 à Σ système réel, le champ intérieur en M est encore $\vec{h}$: ce champ subit en effet dans ce passage, une variation relative qui est de l'ordre infinitésimal de l'écart δ : cette variation est ainsi de l'ordre de $\varepsilon \delta$, donc négligeable. De plus, le potentiel de M diffère alors de celui $\psi(N) + \varphi(N)$, de N , d'une quantité de l'ordre de $\varepsilon \delta$; il lui est donc égal.

Envisageons alors, lorsqu'on déplace M le long de S_0 , la variation du potentiel $\psi(M)$ de M dans Σ_0 et celle du potentiel $\psi(N) + \varphi(N)$ du point correspondant N dans Σ : elles sont égales puisque les différentielles de ces fonctions sont toutes deux égales à $-\vec{h} d\vec{\sigma}$ ($d\vec{\sigma}$ élément d'arc sur S_0).

En conséquence :

$$\psi(N) + \varphi(N) = \psi(M) + K,$$

K étant une constante, d'où résulte, en faisant appel à la définition même de H_n :

$$\psi(N) = \psi(M) - H_n \delta,$$

la relation cherchée entre φ et δ

$$(23) \quad \varphi = H_n \delta + K,$$

le long de S_0 , relation semblable à (20), à la constante K près, qui n'est pas nulle en général, ainsi qu'on va le montrer.

L'équation (23) s'appliquera comme (20) successivement et indépendamment aux termes des divers rangs et l'on aura des conclusions du même ordre que dans le cas électrostatique. La constante K n'apparaît que dans l'ordre zéro :

$$(24) \quad \varphi_0 = H_n \delta_0 + K$$

et c'est à l'aide de cette équation qu'on peut la déterminer. Rappelons que, suivant (7), le début du développement de $\varphi_0(rz)$ à l'infini, s'écrit

$$\varphi_0(rz) = \frac{b}{\rho} + \dots$$

En raison des propriétés linéaires du problème, si l'on considère les $\varphi_0(rz)$ satisfaisant à (24) pour

diverses valeurs de K , le coefficient b correspondant est fonction linéaire de K

$$b = \alpha + \beta K,$$

α et β constantes.

Mais on sait par ailleurs, que les potentiels magnétiques des courants sont des potentiels de dipôle et par suite de degré supérieur à 1 en $\frac{1}{\rho}$; il en est ainsi de $\varphi_0(rz)$, d'où résulte la relation :

$$b = \alpha + \beta K = 0,$$

qui théoriquement permettrait de déterminer K .

INFLUENCE DE LA GRANDEUR D'UN ÉCART δ ; SON VOLUME. — Considérons une bosse arrondie, très petite dans toutes ses dimensions, de forme et grandeur choisies une fois pour toutes; on lui assignera pour simplifier un volume égal à 1. Disposons la au point M de S_0 : elle forme un écart, soit $\varepsilon(M)$ fonction du point M , et crée une certaine loi de potentiel

$$\varphi = \eta(M; rz\theta).$$

On conçoit que tout écart géométrique δ puisse être considéré comme formé par superposition de diverses composantes $\varepsilon(M)$ attachées à des M différents et accompagnés de coefficients $c(M)$ appropriés

$$\delta = \sum_M c(M) \varepsilon(M).$$

Le volume de δ est alors

$$(25) \quad \mathcal{V} = \sum_M c(M).$$

Le potentiel associé à δ est de son côté

$$(26) \quad \varphi = \sum_M c(M) \eta(M; rz\theta).$$

Nous l'envisagerons uniquement dans la région de l'axe Oz .

Si δ est suffisamment localisé au voisinage d'un point M_0 , ses dimensions étant petites vis-à-vis de la distance à Oz et des rayons de courbure de S_0 , les points M intervenant dans les formules précédentes sont très voisins de M_0 , les $\eta(M; rz\theta)$ sont assimilables à $\eta(M_0; rz\theta)$ de sorte que (26) devient

$$\varphi = \eta(M_0; rz\theta) \sum_M c(M)$$

c'est-à-dire d'après (25)

$$(27) \quad \varphi = \mathcal{V} \eta(M_0; rz\theta).$$

En d'autres termes : *Etant donné un écart localisé au voisinage d'un point déterminé de S_0 , le potentiel associé φ dans la région de Oz , et par suite, son effet « optique » dépendent de δ , par l'intermédiaire de son volume $\mathcal{V}$, sans égard à sa forme : il est proportionnel à $\mathcal{V}$.*

Il s'ensuit qu'un défaut géométrique quelconque de forme compliquée, peut toujours être remplacé en ce qui concerne son effet optique par un défaut de forme plus simple à condition que la répartition le long de S_0 du volume de l'écart soit à peu près respectée.

Cette observation est à retenir dans la pratique : les défauts ne sont en général connus qu'avec une approximation plus ou moins grossière; il s'agit d'estimer leur volume et nullement leur élongation maximum par exemple, à moins qu'on ne puisse se donner simultanément leur forme approchée.

Si au lieu du δ global, on en considère une composante donnée localisée au voisinage d'une certaine abscisse, soit $\delta_m \cos m\theta$, les mêmes observations s'appliquent; et l'on peut alors considérer, au lieu du volume, l'aire A de la section de cette composante par le plan de symétrie. La figure (8) schématise l'équivalence entre un défaut de profil donné et un défaut plus simple dont l'aire présente la même répartition le long de S_0 .

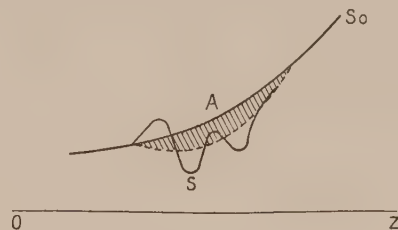


Fig. 8.

On voit ainsi comment un écart intervient par son *étendue*; la suite montrera comment l'effet optique dépend également de sa *position* sur l'électrode.

5. Une famille particulière de potentiels correctifs φ .

La détermination du φ associé à l'écart se réduit à celle des composantes de divers ordres de φ à partir des termes de même ordre de δ . Nous sommes ramenés aux cas purement sinusoïdaux en θ : nous chercherons en conséquence à déterminer φ à partir de δ , c'est-à-dire à résoudre l'équation (20), en supposant par exemple

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_m(rz) \cos m\theta, \\ \delta &= \delta_m(z) \cos m\theta. \end{aligned}$$

On va d'abord définir une source de lois de potentiel en $\cos m \theta$, à partir desquelles on pourra construire φ .

Soit un cercle C de centre O, d'axe Oz et de rayon a ; nous le supposons porteur d'une densité électrique linéaire égale à $\left(\frac{\cos m \theta}{a}\right)$. Nous étudions la loi de potentiel $v(r, \theta)$ qu'il crée en tout point (r, θ) de l'espace.

On a

$$v = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m \gamma d\gamma}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \gamma) + r^2}}.$$

Le changement de variable d'intégration $\theta - \gamma = \beta$ montre immédiatement que l'on peut écrire

$$(28) \quad \begin{cases} v(r, \theta) = v_m(r, z) \cos m \theta, \\ v_m = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m \gamma d\gamma}{\sqrt{z^2 + a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2}}, \end{cases}$$

v est régulier sauf sur le cercle C et s'annule à l'infini. Cette fonction correspond au cas limite ($M \rightarrow \infty$) des systèmes en étoile à électrodes ponctuelles.

Nous obtenons d'autres potentiels en faisant subir à la répartition $v(r, \theta)$, des translations quelconques suivant Oz ou en en prenant les dérivées partielles d'ordre quelconque par rapport au paramètre a ou à la coordonnée z :

$$\frac{\partial v}{\partial a}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \dots$$

toutes ces lois sont du type $\varphi = \varphi_m \cos m \theta$ s'annulant à l'infini

$$\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\partial v_m}{\partial a} \cos m \theta, \quad \dots$$

On peut obtenir des indications sur leurs propriétés à l'aide de l'étude préliminaire des potentiels statiques. Nous allons en retrouver les résultats de façon précise. On allégera l'écriture en posant $a = 1$

$$v_m = \int_0^{2\pi} \frac{\cos m \gamma d\gamma}{\sqrt{z^2 + 1 - 2r \cos \gamma + r^2}}.$$

Le rétablissement de a pourra s'obtenir facilement à tout moment à l'aide de raisons d'homogénéité.

A. ÉTUDE AU VOISINAGE DE O z. — Étant donné

$$\begin{aligned} & (z^2 + 1 - 2r \cos \gamma + r^2)^{-\frac{1}{2}} \\ & = (z^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2r \cos \gamma}{1 + z^2} + \frac{r^2}{1 + z^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On sait d'autre part [2] qu'on peut écrire, si u est assez petit

$$(1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty P_n(x) u^n$$

[$P_n(x)$ polynôme de Legendre de degré n].

Il en résulte ici

$$\left(1 - \frac{2r \cos \gamma}{1 + z^2} + \frac{r^2}{1 + z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty P_n \left(\frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 + z^2}} \right) \frac{r^n}{(1 + z^2)^{\frac{n}{2}}}$$

et par suite

$$v_m = \sum_0^\infty \frac{r^n}{(1 + z^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{2\pi} P_n \left(\frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 + z^2}} \right) \cos m \gamma d\gamma.$$

Nous calculerons seulement le premier terme de ce développement; il nous faut ainsi déterminer la plus petite valeur de n donnant à l'intégrale une valeur $\neq 0$; cette valeur est le degré du premier des polynômes P_n qui contienne $\cos m \gamma$ dans son développement de Fourier. Or, ce polynôme est P_m ; il renferme $\cos m \theta$, donc un terme en $\cos m \theta$, que nous évaluons

$$\begin{aligned} P_m \left(\frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 + z^2}} \right) &= \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} \frac{\cos^m \gamma}{(1 + z^2)^{\frac{m}{2}}} + \dots \\ &= \frac{(2m)!}{2^{2m-1} (m!)^2} \frac{\cos^m \gamma}{(1 + z^2)^{\frac{m}{2}}} + \dots, \end{aligned}$$

En portant dans l'expression de v_m et effectuant l'intégrale nous obtenons ainsi

$$(29) \quad v_m = \frac{(2m)! \pi}{2^{2m-1} (m!)^2} \frac{r^m}{(1 + z^2)^{m + \frac{1}{2}}} + \dots$$

Exemples :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{2\pi}{(1 + z^2)^2} + \dots, & v_1 &= \frac{\pi r}{(1 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \dots, \\ v_2 &= \frac{3\pi}{4} \frac{r^2}{(1 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots \end{aligned}$$

Le calcul du premier terme des potentiels dérivés s'effectue sans difficulté. Soit à prendre $\frac{\partial v_2}{\partial a}$; les v_m étant de degré (-1) par rapport aux longueurs, l'on doit avoir, dans le cas $a \neq 1$

$$v_2 = \frac{3\pi}{4} \frac{a^2 r^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots,$$

d'où l'on tire

$$(30) \quad \frac{\partial v_2}{\partial a} = -\frac{3\pi}{4} \frac{3 - 2z^2}{(1 + z^2)^{\frac{7}{2}}} r^2 + \dots$$

B. ÉTUDE AU LOIN DANS UNE DIRECTION PERPENDICULAIRE A O z. — Nous avons ici un problème tout à fait analogue au précédent, mais il faut appliquer le développement [2]

$$(1 - 2ux + u^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \frac{1}{u^{n+1}} P_n(x)$$

valable pour u suffisamment grand, c'est-à-dire :

$$\left(1 - \frac{2r \cos \gamma}{1+z^2} + \frac{r^2}{1+z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} P_n \left(\frac{\cos \gamma}{\sqrt{1+z^2}} \right) \frac{(1+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}{r^{n+1}}.$$

Nous sommes conduits aux mêmes intégrales que ci-dessus et le résultat s'obtient simplement à l'aide de (29) en y mettant en évidence le facteur

$$\frac{r^m}{(1+z^2)^{\frac{m}{2}}} \text{ que l'on remplacera par } \frac{(1+z^2)^{\frac{(m+1)}{2}}}{r^{m+1}},$$

d'où

$$(31) \quad v_m = \frac{(2m)! \pi}{2^{2m-1} (m!)^2} \frac{1}{r^{m+1}} + \dots$$

Exemple :

$$v_2 = \frac{3\pi}{4} \frac{1}{r^3} + \dots$$

De là on passe aux dérivés en a :

$$\frac{\partial v_2}{\partial a} = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{r^3} + \dots$$

Pour avoir les dérivés en z , on voit qu'il faudrait calculer un terme d'ordre supérieur du développement de v_m ; leur décroissance à l'infini est plus rapide que suivant la loi précédente.

Expressions au loin dans une direction quelconque

— La formule (7) fournit la forme *a priori* de la valeur au loin de v_m ; si on la rapproche de la relation (31) vérifiée pour $z = 0$, cette dernière détermine le coefficient b_m d'où résultent, par exemple, les valeurs

$$(32) \quad v_2 = \frac{3\pi}{4} \frac{\sin^2 \tau}{\rho^3} + \dots \quad \frac{\partial v_2}{\partial a} = \frac{3\pi}{2} \frac{\sin^2 \tau}{\rho^3} + \dots$$

C. ÉTUDE AU VOISINAGE DU CERCLE C. — Plaçons-nous dans le plan méridien $\theta = 0$, de sorte que les $v(rz, \theta)$ calculés soient les $v_m(rz)$... eux-mêmes.

Nous désignons encore par C, l'une des traces du cercle C dans ce plan. Les potentiels sont infinis sur C; nous cherchons le premier terme de leur expression en tout point M, voisin, que nous repérons par ses coordonnées polaires par rapport à C : l, ω (fig. 9).

La partie principale de v_m en M est fournie par l'élément de cercle situé en regard; elle ne dépend pas du reste de la ligne électrisée. Pour l'obtenir il est donc permis de remplacer le cercle par sa tangente en C supposée illimitée et de densité linéaire uniforme égale à $\frac{1}{a}$. On se trouve ainsi ramené à un problème élémentaire :

$$(33) \quad v_m = -\frac{2}{a} \log l \text{ indépendant de } m.$$

Si l'on tient compte des égalités faciles à établir

$$\frac{\partial l}{\partial a} = -\sin \omega, \quad \frac{\partial l}{\partial z} = \cos \omega,$$

on en déduit les dérivées premières :

$$(34) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_m}{\partial a} = -\frac{2}{a} \frac{\sin \omega}{l} + \dots, \\ \frac{\partial v_m}{\partial z} = -\frac{2}{a} \frac{\cos \omega}{l} + \dots, \end{cases}$$

expressions indépendantes de m.

On pourrait voir que les dérivées d'ordre supérieur font intervenir les lignes trigonométriques des multiples de ω et les puissances de l , mais nous n'aurons pas à les utiliser.

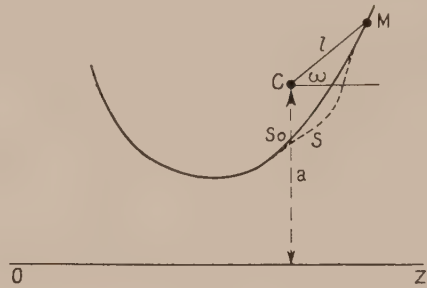


Fig. 9.

Les formules précédentes montrent que les dérivées ont, au voisinage de C, un comportement très différent de celui de v_m ; en particulier leur signe n'est pas constant : il dépend de l'angle ω et cette remarque est importante pour la suite.

6. Application : détermination pratique de φ .

PRINCIPE DE LA MÉTHODE EMPLOYÉE. — Étant donnée l'électrode parfaite S_0 créant ψ , imaginons le cercle C de rayon a et d'axe Oz, tracé dans le métal de S_0 , et envisageons, à l'extérieur de S_0 , un des potentiels du type précédent : $\varphi = \varphi_m \cos m\theta$ associé à C.

Ce potentiel peut tout aussi bien être considéré comme étant créé par un défaut $\delta = \delta_m \cos m\theta$ sur S_0 et qu'on va déterminer.

Calculons numériquement la valeur de φ le long de S_0 dans le plan $\theta = 0$, soit $\varphi_m(z)$. Nous en tirons en tout point de la méridienne, une fonction $\delta_m(z)$ définie par

$$E(z) \delta_m(z) = \varphi_m(z).$$

La méridienne de la surface perturbée S créant précisément φ est celle dont chaque point est à distance $\delta_m(z)$ de S_0 ; elle est donc connue si E l'est

ce que nous supposons. On pourrait de même considérer un φ , combinaison linéaire de divers potentiels ν ou dérivés, attachés au même cercle C ou à des cercles différents, toujours tracés dans le métal. A l'aide de son évaluation numérique sur S_0 , on déterminerait la surface S associée.

On cherchera alors, à l'aide de choix appropriés pour C et pour la combinaison linéaire, à reproduire un φ correspondant à l'écart étudié avec une approximation convenable.

Ce travail est plus simple qu'il n'y paraît au premier abord. D'une part, en effet, en vertu de l'imprécision de la mesure expérimentale des écarts, et de la possibilité de les supposer « arrondis », il s'agira de δ de formes simples. En s'appuyant d'autre part sur les résultats de l'étude des ν et dérivés, on pourra avant tout calcul numérique, déterminer dans une large mesure, le choix du ou des cercles C et des fonctions à faire intervenir.

On remarquera en premier lieu, du fait que les potentiels ν sont infiniment grands sur C , et s'annulent à l'infini, qu'il y a intérêt dans le cas d'un δ local, à *placer le cercle au voisinage de la zone perturbée (fig. 9).*

Les formules d'approximation, telles que celles de (31) à (34) renseigneront ensuite sur les valeurs que prennent les diverses fonctions ν_m le long de S_0 , donc les fonctions $\delta_m(z)$ associées.

EXEMPLE D'OBTENTION DE φ : CAS D'UN ÉCART DU DEUXIÈME ORDRE (ELLIPTICITÉ D'UNE LENTILLE ÉLECTROSTATIQUE). — Nous envisagerons ce cas en raison de son importance. On prendra comme électrode la pièce médiane d'une lentille électrostatique de modèle courant dont H. Bruck [3] a déterminé les diverses caractéristiques en symétrie de révolution [4] : S_0 est constituée essentiellement par un disque métallique percé d'une ouverture circulaire dont le profil est celui d'un demi-tore. Nous désignons par R le rayon du cercle de gorge; l'épaisseur du disque est de l'ordre de $\frac{R}{2}$ (le problème ne nécessite pas la connaissance des dimensions absolues elles-mêmes).

L'étude à la cuve électrolytique montre qu'à l'approximation où nous nous plaçons, *on peut considérer le champ superficiel E comme constant.*

On conçoit que *la réalisation au tour de l'ouverture centrale constitue la source principale des perturbations* apportées à la surface « parfaite »; l'observation à l'aide d'un microscope à faible grossissement montre qu'effectivement cette ouverture n'est pas rigoureusement « ronde »; son contour apparent

présente une légère ellipticité qui peut être de l'ordre du $1/100^\circ$ si l'on n'apporte pas un soin tout particulier à sa réalisation.

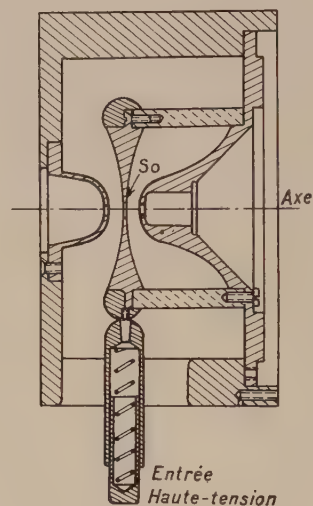


Fig. 10. — Lentille électrostatique (H. Bruck).

En vue d'étudier le φ créé par cet écart $m = 2$, nous le supposons symétrique par rapport au plan $z = 0$ et de profil simple (fig. 11 dans laquelle la distance entre S_0 et S est fortement exagérée).

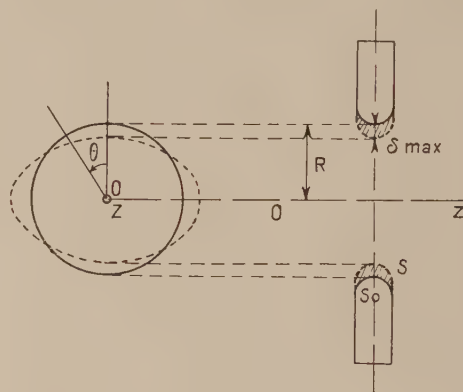


Fig. 11.

On peut écrire :

$$\delta(z\theta) = \delta_2(z) \cos 2\theta,$$

$\delta_2(z)$ étant une fonction positive correspondant à la région hachurée sur la figure 11; elle est pratiquement nulle à l'extérieur de l'ouverture elle-même.

Le maximum absolu $\delta_{\max}$ de la fonction $\delta_2(z)$ s'obtient pour $\theta = 0, z = 0$.

Ces observations nous conduisent à essayer la résolution au moyen d'un cercle C disposé dans

le plan $z = 0$ et de rayon a , un peu supérieur à R ; en ce qui concerne d'autre part ses potentiels associés, il y aura lieu de n'envisager que ceux symétriques par rapport à $z = 0$, c'est-à-dire, fonctions paires en z :

$$\nu = \nu_2 \cos 2\theta, \quad \frac{\partial \nu}{\partial a} = \frac{\partial \nu_2}{\partial a} \cos 2\theta.$$

Nous les examinerons d'abord séparément en mettant leurs propriétés en évidence sur une figure. La figure 12 a porte les indications des valeurs asymptotiques de ν_2 : sur l'axe Oz (29), au loin dans le plan $z = 0$ (31), au voisinage de C (32); en assimilant ν_2 à ces valeurs, nous en déduisons le $\delta_2(z)$ qui lui est directement proportionnel le long de S_0 : d'où la surface S associée à ν .

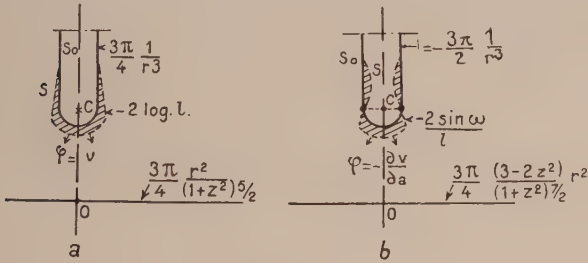


Fig. 12.

La figure 12 b donne de même les indications concernant $-\frac{\partial \nu_2}{\partial a}$. Les formules supposent $a = 1$.

On voit, en rapprochant les figures 12 de la figure 11, que les écarts associés respectivement à ν et $-\frac{\partial \nu}{\partial a}$ ne représentent qu'imparfaitement le défaut à reconstituer. Ils s'étendent en effet non seulement à l'ouverture de S_0 où ils prennent leurs valeurs les plus grandes, mais aussi aux faces planes extérieures.

Choix de $\delta = 2\nu - \frac{\partial \nu}{\partial a}$. — Au contraire, si nous essayons la combinaison $2\nu - \frac{\partial \nu}{\partial a}$, nous pouvons prévoir qu'elle s'adaptera de façon bien meilleure au problème. Ses deux termes s'additionnent en effet arithmétiquement sur le demi-tore, alors qu'ils se retranchent sur les flancs de S_0 de telle manière que $2\nu - \frac{\partial \nu}{\partial a}$ s'y trouve d'ordre infini-tésimal supérieur à $\frac{1}{r^3}$.

Nous adoptons cette nouvelle fonction et passons au calcul numérique. Précisons les grandeurs géométriques : la cote de C étant $a = 1$, nous supposons par exemple que C coïncide avec le cercle moyen du demi-tore de la lentille, le disque ayant

une épaisseur égale à 0,4 d'où $R = 0,8$; une homothétie fera passer ultérieurement aux dimensions exactes.

L'expression à évaluer sur S_0 : $2\nu - \frac{\partial \nu}{\partial a}$ met en jeu d'après (28) deux intégrales où figure essentiellement la distance d'un point M aux divers points d'un cercle, un procédé de calcul graphique facile à imaginer sera particulièrement commode surtout si l'on tient compte du degré de précision admissible. Le tableau ci-dessous fournit les valeurs obtenues ainsi pour $E\delta_2$ en six points du profil de S_0 (fig. 13).

(α) par le calcul numérique,

(β) par les formules asymptotiques valables au voisinage de C : (33) et (34),

(γ) par celles valables au loin : (31).

$$E\delta_2 = 2\nu - \frac{\partial \nu}{\partial a}.$$

Points de S_0 .	(α).	(β).	(γ).
M_0	14	16	—
M_1	12	13	—
M_2	4,5	6	—
M_3	— 0,5	0	0
M_4	— 0,5	—	0
M_5	— 0,1	—	0

(Les derniers nombres de la colonne (α) représentent seulement des valeurs par excès.)

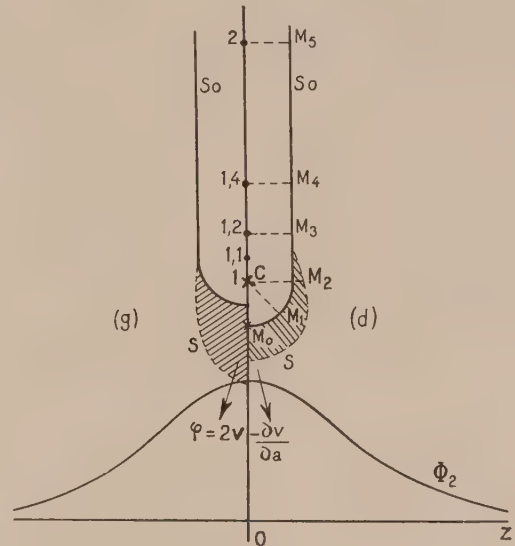


Fig. 13.

La moitié droite de la figure (13) montre l'allure (écart fortement amplifié) du profil de l'électrode S perturbée par le δ ainsi défini.

La moitié gauche fournit, de même, le cas d'une électrode dont le cercle de gorge aurait un rayon

égal non plus à 0,8 mais à 0,9, φ et E ayant les mêmes valeurs que dans la première éventualité, et a étant toujours égal à 1.

On voit clairement en quoi diffèrent les deux perturbations. Dans la première (d) le défaut déborde légèrement du demi-tore; δ est d'autre part pratiquement constant sur une partie de la surface incurvée et

$$E \delta_{\max} \neq 14.$$

Dans la deuxième disposition (g) le défaut n'affecte que la zone du demi-tore; δ décroît rapidement à partir du cercle de gorge où il atteint un maximum sensiblement supérieur à celui de (d); on trouve

$$E \delta_{\max} \neq 30.$$

Les cas (d) et (g) sont équivalents en ce sens qu'ils possèdent le même φ qu'il nous reste à calculer maintenant dans la région de Oz ; on tire de (29) et de (30) :

$$\varphi = \varphi_2 \cos 2\theta, \quad \varphi_2 = \frac{15\pi}{4} \frac{r^2}{(1+z^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

Cette formule est valable pour des valeurs particulières du rayon du cercle de gorge R (0,8 et 0,9) et de $E\delta_{\max}$ (14 et 30). Il reste à y faire apparaître ces deux paramètres à l'aide de considérations d'homogénéité de façon qu'elle soit applicable aux divers problèmes « homothétiques ». Notons qu'il n'y a plus lieu maintenant de faire intervenir le cercle C .

Le résultat est le suivant, avec rappel des hypothèses de base :

Soient la pièce centrale d'une lentille à trois électrodes, R le rayon de son cercle de gorge, supposé de l'ordre du double de l'épaisseur, E le champ superficiel le long de ce cercle. On suppose cette pièce affectée d'une perturbation géométrique $\delta = \delta_2 \cos 2\theta$, la variation de δ_2 le long de la méridienne étant d'un des deux types (d) ou (g). Soit $\delta_{\max}$ son maximum. Cette perturbation crée un champ parasite $\varphi = \varphi_2 \cos 2\theta$ que définissent dans la région « optique » (voisinage de Oz) les formules

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2 = 0,55 E \delta_{\max} \frac{1}{\left(1 + 0,64 \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{7}{2}}} \frac{r^2}{R^2} \quad (\text{type } d), \\ \varphi_2 = 0,32 E \delta_{\max} \frac{1}{\left(1 + 0,8 \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{7}{2}}} \frac{r^2}{R^2} \quad (\text{type } g). \end{array} \right.$$

Dans la réalité la distinction entre deux tels cas est dépourvue de valeur, car il est clair que les tentatives de détermination expérimentale des écarts

vis-à-vis de la symétrie de révolution ne peuvent guère que fournir approximativement $\delta_{\max}$ sans indication précise sur la répartition de l'écart le long du méridien. Aussi ne pouvons-nous compter que sur la connaissance d'un ordre de grandeur de φ_2 et adopter si l'on veut, une formule « moyenne », par exemple :

$$(36) \quad \varphi_2 = 0,4 E \delta_{\max} \frac{1}{\left(1 + 0,7 \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{7}{2}}} \frac{r^2}{R^2}$$

(6) permet d'en déduire l'expression de la fonction Φ_2 dont la courbe représentative est reportée sur la figure 13

$$(37) \quad \Phi_2 = 1,6 \frac{E \delta_{\max}}{R^2} \frac{1}{\left(1 + 0,7 \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{7}{2}}}.$$

CHAPITRE II.

ABERRATIONS OPTIQUES DES SYSTÈMES CENTRÉS PERTURBÉS.

7. Équation des trajectoires.

Pour passer à l'étude optique des systèmes de révolution présentant des écarts vis-à-vis de leur état « idéal », on établira tout d'abord l'équation générale des trajectoires électroniques dans l'ensemble de deux champs, électrique et magnétique, supposés quelconques.

Il ne sera pas tenu compte pour le moment de l'effet de relativité mis en jeu si les électrons sont suffisamment rapides. On sait que cet effet peut être sensible; toutefois, le calcul que nous en ferons par la suite montrera qu'il s'agit là de modifications accessoires en ce qui concerne le sujet traité. On négligera de même les actions répulsives mutuelles entre particules (charge d'espace), l'aberration chromatique due à ce que ces dernières ne sont pas strictement monocinétiques et enfin la diffraction occasionnée par les ondes associées. Ces phénomènes correctifs sont envisagés dans les études classiques des systèmes centrés [4] et ne nécessitent pas ici une étude différente.

Nous utiliserons le système de coordonnées : $z, s = re^{i\theta}$; il allège notablement l'écriture et permet de voir plus facilement la signification des équations. De façon générale toute grandeur définie par deux projections suivant les axes Ox, Oy (Ex. : vecteur champ normal à Oz) sera repré-

sentée par son affixe dans les plans transversaux décrits par s et jouant le rôle de plans complexes.

Les notations concernant les champs auront dorénavant les significations suivantes :

- $\varphi(rz0)$ potentiel total du champ électrique;
- $\Phi_m(z)$ composantes correspondantes;
- $\vec{A}(rz0)$ potentiel vecteur du champ magnétique (composantes cartésiennes A_x, A_y, A_z);
- $\psi(rz0)$ son potentiel scalaire;
- $\Psi_m(z)$ ses composantes.

Nous déterminerons les trajectoires à l'aide d'une méthode couramment employée dans les cas plus simples de systèmes présentant certaines symétries (systèmes centrés, etc.).

Cette méthode se fonde sur le *principe de moindre action* de Maupertuis étendu au mouvement de particules électrisées dans un champ électromagnétique [5] : on considère l'intégrale $\int_A^{A'} \mu d\sigma$ ($d\sigma$ élément d'arc) prise le long d'une ligne joignant deux points quelconques A, A' : μ y désigne la fonction

$$\mu = \sqrt{\varphi} - \eta A \frac{d\sigma}{d\tau},$$

où η est une constante dont la valeur est donnée plus loin; l'intégrale précédente est stationnaire si la ligne est une trajectoire.

Posons alors

$$(38) \quad L = \sqrt{\varphi} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} - \eta (A_x x' + A_y y' + A_z z),$$

l'accentuation indiquant dans la suite la dérivation totale par rapport à la variable z ; les équations d'Euler fournissent les équations différentielles des trajectoires sous la forme

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(39) \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{\sqrt{\varphi} x'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} - \eta A_x \right) - \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \frac{d\varphi}{dz} + \eta \left(x' \frac{dA_x}{dz} + y' \frac{dA_y}{dz} + \frac{dA_z}{dz} \right) = 0,$$

et la relation analogue où x est remplacé par y .

Si les grandeurs électriques et magnétiques sont évaluées respectivement en U.E.S. et U.E.M.C.G.S., η désigne la constante

$$\sqrt{\frac{e}{2mc^2}} \text{ (U.E.S.C.G.S.)}$$

On conviendra, sauf mention contraire, d'adopter les unités pratiques de champs (potentiels) : *volt*, *volt-cm*, *gauss*, de sorte que l'on aura en raison de la structure des équations

$$(40) \quad \eta = \sqrt{\frac{300 e}{2mc^2}} \text{ (U.E.S.C.G.S.)} = 0,295.$$

Exprimons maintenant (39) dans le système de coordonnées s, z : à l'aide des formules de passage

$$x = \frac{1}{2}(s + \bar{s}), \quad y = -\frac{i}{2}(s - \bar{s}),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \bar{s}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right),$$

les deux équations deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\varphi} (s' + \bar{s}')}{\sqrt{1 + s' \bar{s}'}} - \eta A_x \right) - \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \sqrt{1 + s' \bar{s}'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{s}} \right) + \eta \left(x' \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dots \right) &= 0, \\ \frac{d}{dz} \left(-\frac{i}{2} \frac{\sqrt{\varphi} (s' - \bar{s}')}{\sqrt{1 + s' \bar{s}'}} - \eta A_y \right) - \frac{i}{2\sqrt{\varphi}} \sqrt{1 + s' \bar{s}'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{s}} \right) + \eta \left(x' \frac{\partial A_y}{\partial y} + \dots \right) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions la première par 1, la deuxième par i et additionnons; si l'on remplace $\frac{d}{dz}$ pour φ et A en fonction des dérivées partielles

$$\frac{d}{dz} = s' \frac{\partial}{\partial s} + \bar{s}' \frac{\partial}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial}{\partial z},$$

on voit apparaître les composantes du champ magnétique $\text{rot } \vec{A}$, ce qui nous ramène à la fonction ψ et à ses dérivées. La composante suivant Oz étant

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Celle suivant le plan transversal étant d'autre part

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2 \frac{\partial \psi}{\partial s}.$$

Tous calculs faits, on obtient ainsi une seule équation indépendante

$$(41) \quad \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} s' + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{s}} \bar{s}' + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{s'}{\sqrt{1 + s' \bar{s}'}} + \varphi \frac{d}{dz} \frac{s'}{\sqrt{1 + s' \bar{s}'}} - \sqrt{1 + s' \bar{s}'} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + i \eta \sqrt{\varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} s' - 2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) \right] = 0,$$

relation unique équivalente aux deux équations réelles (39).

CAS OU LE CHAMP EST PUREMENT ÉLECTRIQUE : DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION (41), CLASSEMENT DES DIVERS TERMES. — On supposera jusqu'à nouvel ordre qu'il n'existe pas de champ magnétique dans le système Σ , même à titre de perturbations : le dernier terme de l'équation précédente est donc à supprimer. Comme dans tout calcul d'aberration, on ne considère que les trajectoires voisines de l'axe Oz du système : s et $\bar{s}$ sont des quantités très petites et nous développons l'équation (41) jusqu'aux termes du troisième ordre inclus en s et $\bar{s}$; on obtient un résultat pouvant s'écrire sous la forme suivante mettant en évidence sa structure

$$(42) \quad \{\Phi_0 s\} + \{\Phi_1\} + \{\Phi_0 s^3\} + \{\Phi_1 s^2\} + \{\Phi_2 s\} + \{\Phi_2 s^3\} + \{\Phi_3 s^2\} + \{\Phi_4 s^3\} = 0$$

ou sous une forme plus condensée

$$(42) \quad \boxed{\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_1\} + \mathcal{A} = 0}$$

avec

$$\mathcal{A} = \{\Phi_0 s^3\} + \{\Phi_1 s^2\} + \dots$$

Les accolades ont les expressions

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \{\Phi_0 s\} &= \Phi_0 s'' + \frac{\Phi_0^1}{2} s' + \frac{\Phi_0^2}{4} s, \\ \{\Phi_1\} &= -\frac{\bar{\Phi}_1}{2}, \\ \{\Phi_0 s^3\} &= - \left[\frac{\Phi_0}{2} (2 s' \bar{s}' s'' + s'^2 \bar{s}'') + \frac{\Phi_0^1}{4} s'^2 \bar{s}' + \frac{\Phi_0^2}{8} (2 s \bar{s} s'' + s'^2 \bar{s}) + \frac{\Phi_0^3}{8} s \bar{s} s' + \frac{\Phi_0^4}{32} s^2 \bar{s} \right], \\ \{\Phi_1 s^2\} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_1}{2} (2 s s'' + s'^2) + \bar{\Phi}_1 \bar{s} s'' + \frac{\Phi_1^1}{2} s s' + \frac{\bar{\Phi}_1^1}{2} \bar{s} s' + \frac{\Phi_1^2}{8} s^2 + \frac{\bar{\Phi}_1^2}{4} s \bar{s} \right], \\ \{\Phi_2 s\} &= -\frac{1}{4} \bar{\Phi}_2 \bar{s}, \\ (\{\Phi_2 s^3\}) &= , \\ \{\Phi_3 s^2\} &= -\frac{1}{16} \bar{\Phi}_3 \bar{s}^2, \\ \{\Phi_4 s^3\} &= -\frac{1}{96} \bar{\Phi}_4 \bar{s}^3, \end{aligned} \right.$$

On voit que chaque accolade symbolise l'ensemble des termes dont les degrés sont ceux de la quantité entre accolades, sans distinguer en cela entre une fonction et ses conjuguées ou dérivées par rapport à z (rappelons que pour une question de commodité d'écriture, les indices supérieurs portant sur les fonctions composantes représentent des indices de dérivation).

(42) constitue l'équation fondamentale des trajectoires; nous supposons que $\Phi_0(z)$ n'est pas petit, ce qui est toujours possible : il ne peut, en effet, être identiquement nul, sinon les électrons seraient immobiles; au cas où d'autre part il serait petit, il suffirait de multiplier $\varphi(rz\theta)$ par un nombre suffisant pour obtenir un autre ordre de grandeur sans que cela influe sur les trajectoires.

En ce qui concerne $\Phi_1(z)$, l'équation (42) le suppose nécessairement petit; dans l'éventualité contraire, elle contiendrait un terme de grandeur finie, $\{\Phi_1\}$, incompatible avec la grandeur des autres termes. Autrement dit, l'équation suppose voisines de zéro, les composantes du champ d'ordre $m = 1$: $\varphi_1 \cos \theta$ et $\varphi_1' \sin \theta$. Moyennant cette condition elle définit, dans une région suffisamment voisine de Oz , les trajectoires de champs quelconques, ainsi que la suite le montrera.

Si nous appliquons (42) à notre problème même de système centré perturbé par des écarts, le symbole φ représente le potentiel total de Σ , qu'on a noté dans une étude précédente : $\psi + \varphi$: potentiel du système idéal + terme correctif. ψ ne fournissant de contribution que dans $\Phi_0(z)$, les fonctions $\Phi_m(z)$, ($m > 1$) sont celles du terme correctif lui-même; elles sont alors à considérer comme infiniment petits au même titre que s , de sorte que l'équation (42) pourra être réduite à un nombre de termes moindre, suivant la structure du champ, c'est-à-dire suivant les importances relatives de $\Phi_m(z)$, ces fonctions étant, rappelons-le, a priori indépendantes les unes des autres.

L'équation (42) se réduit par exemple à

$$\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_0 s^3\} = 0$$

dans le cas classique où l'on envisage seulement les aberrations du système de révolution Σ_0 lui-même : $\Phi_m(z) \equiv 0$ pour $m \geq 1$.

8. Les rôles des différents termes de l'équation.

Nous allons, en mettant progressivement en jeu les différents termes, observer le caractère propre de leurs actions respectives et obtenir en outre la formule générale de résolution.

La considération des deux premiers termes de (42) (linéaires en s, s', s''), constitue une première approximation, l'approximation de Gauss, que nous noterons simplement AG.

On supposera une fois pour toutes le champ nul dans les milieux extrêmes, lieux des points objets et de leurs images; les trajectoires y sont alors des droites et l'on sait que cette restriction, vérifiée couramment en pratique, permet ainsi une analogie plus grande avec l'optique lumineuse.

TRAJECTOIRES DANS LES CHAMPS DE RÉVOLUTION (AG)

$$\{\Phi_0 s\} = 0 :$$

$$(44) \quad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi_0'}{2} s' + \frac{\Phi_0''}{4} s = 0.$$

Rappelons que de cette équation différentielle, homogène, à coefficients réels, résultent les propriétés de focalisation : les trajectoires issues d'un point objet convergent toutes en un point image.

TRAJECTOIRES DANS LES CHAMPS AFFECTÉS D'UNE DISSYMMÉTRIE D'ORDRE $m = 1$ (A G)

$$\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_1\} = 0 :$$

$$(45) \quad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi_0'}{2} s' + \frac{\Phi_0''}{4} s - \frac{\bar{\Phi}_1}{2} = 0.$$

D'après l'étude antérieure, l'existence de Φ_1 peut provenir par exemple d'écarts géométriques d'ordre 1, c'est-à-dire de *légers décentrages des électrodes* venant détruire la symétrie de révolution du système.

L'équation obtenue est toujours linéaire du deuxième ordre en s , mais elle n'est pas homogène; on sait que ses intégrales peuvent s'écrire sous la forme :

intégrale quelconque de (44) + intégrale particulière de (45).

Cette dernière sera par exemple, la trajectoire notée $s = \zeta(z)$ confondue avec l'axe Oz dans le milieu objet. Il en résulte que les *propriétés de focalisation existent encore* : l'introduction de la composante Φ_1 a comme seul effet de faire subir à chaque plan conjugué image z , donc à chaque image, la translation d'affixe $\zeta(z)$ dans ce plan lui-même (fig. 14 a).

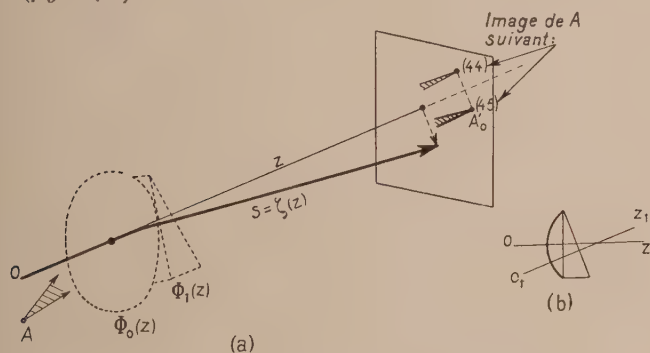


Fig. 14.

Prenons le cas où $\Phi_0(z)$ ne se réduit pas à une constante : pour parler le langage de l'optique ordinaire, l'action de Φ_1 dans l'A G est celle d'un *prisme*

de petit angle mis à la suite du système centré représenté par Φ_0 .

Il existe une trajectoire et une seule dont les parties incidente et émergente ont même support, soit $O_1 z_1$. La propriété est évidente si l'on envisage une lentille plan convexe et un prisme accolés (fig. 14 b); elle découle de la correspondance homographique entre les rayons des deux milieux extrêmes et s'applique donc très généralement. On pourra appeler $O_1 z_1$, *axe optique* de Σ : si l'on prend comme référence un système dont l'axe polaire est non plus Oz mais $O_1 z_1$, Φ_1 n'intervient plus à l'approximation de Gauss, car les translations des plans images qui traduisent son action sont alors nulles; Σ apparaît comme étant un *système centré* sur $O_1 z_1$.

Si $\Phi_0(z)$ se réduit à une constante, Σ équivaut à un simple prisme de petit angle et ce cas s'observera dans l'examen des systèmes correcteurs.

TRAJECTOIRES DANS LE CAS GÉNÉRAL. — Supposons maintenant qu'on ne puisse négliger le terme α dans la relation (42) : cette équation n'est plus analytique en s car elle fait intervenir $\bar{s}$ et ses dérivées. Les propriétés de focalisation s'appuyaient en partie sur le caractère analytique : elles n'existent donc plus actuellement et aux points objets ne correspondent plus de points images.

Toutefois si Φ_2 est petit, c'est-à-dire, s'il provient d'un « écart », et quel que soit par ailleurs l'ordre de grandeur des Φ_m ($m > 2$), α est un terme correctif vis-à-vis de $\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_1\}$; autrement dit les propriétés de focalisation subsistent en première approximation : les écarts apparaissent sous forme d'*aberration*. Nous nous plaçons dans ce cas par la suite.

9. Résolution de l'équation : aberration de rayons.

Définissons d'abord les éléments du système optique qui joueront un rôle permanent dans la suite.

On envisage un plan objet déterminé perpendiculaire à Oz , d'abscisse $z = a$. Les points objets A seront définis dans ce plan par leur affixe $s = re^{i\theta}$ notée u . On appellera A' les points images qui leur correspondent dans l'équation d'approximation de Gauss (45), γ le grossissement correspondant; les points A' se trouvent dans le plan conjugué P' d'abscisse $z = a'$.

On devra tenir compte également du diaphragme d'ouverture D limitant les faisceaux. D sera supposé circulaire, perpendiculaire à l'axe Oz , d'abscisse $z = d$. Il ne sera pas obligatoirement centré sur l'axe et nous désignerons par v_d l'affixe de son centre (fig. 15).

Il nous faut encore définir la trajectoire générale de l'équation homogène (44). A cet effet, nous consi-

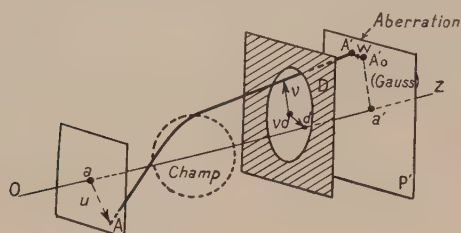


Fig. 15.

dérons les deux trajectoires particulières, supposées connues

$$s = s_{10}(z), \quad s = s_{01}(z)$$

définies par les conditions

$$(46) \quad \begin{cases} s_{10}(a) = 1, & s_{10}(d) = 0, \\ s_{01}(a) = 0, & s_{01}(d) = 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire par des propriétés simples représentées sur la figure 16.

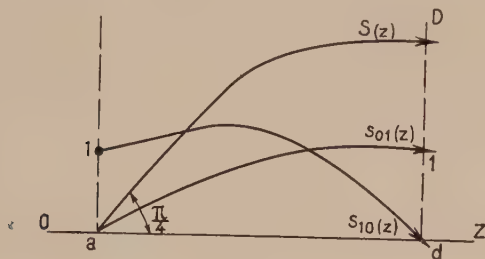


Fig. 16.

La trajectoire générale de (44) est alors déterminée par l'équation

$$s = c_1 s_{10} + c_2 s_{01},$$

c_1 et c_2 étant deux constantes arbitraires.

En vue de son rôle futur on envisagera encore la trajectoire particulière $S(z)$ définie par

$$S(a) = 0, \quad S'(a) = 1.$$

Nous allons voir maintenant les résolutions de l'équation de Gauss non homogène (45) et de l'équation totale (42).

Equation (45). — La méthode de variation des constantes [6] en donne la solution particulière $s = \zeta(z)$

$$\zeta(z) = - \int_a^z \frac{s_{10}(t)s_{01}(z) - s_{01}(t)s_{10}(z)}{s_{10}(t)s'_{01}(t) - s_{01}(t)s'_{10}(t)} \frac{1}{\Phi_0(t)} \left[-\frac{\bar{\Phi}_1(t)}{2} \right] dt.$$

Le dénominateur figurant dans l'intégrale peut s'écrire de façon plus simple [6], en vertu des pro-

priétés des équations différentielles linéaires

$$s_{10}(t)s'_{01}(t) - s_{01}(t)s'_{10}(t) = K e^{-\int_a^t \frac{\Phi'_0}{2\Phi_0} dt},$$

c'est-à-dire, si l'on tient compte de sa valeur $s'_{01}(a)$ pour $z = a$

$$s_{10}(t)s'_{01}(t) - s_{01}(t)s'_{10}(t) = s'_{01}(a) \sqrt{\frac{\Phi_0(a)}{\Phi_0(t)}},$$

d'où

$$(47) \quad \zeta(z) = - \frac{1}{s'_{01}(a) \sqrt{\Phi_0(a)}} \times \int_a^z \frac{s_{10}(t)s_{01}(z) - s_{01}(t)s_{10}(z)}{\sqrt{\Phi_0(t)}} \left[-\frac{\bar{\Phi}_1(t)}{2} \right] dt$$

L'intégrale générale de (45) est ainsi

$$(48) \quad s = c_1 s_{10} + c_2 s_{01} + \zeta.$$

(47) se simplifie pour $z = a'$: le déplacement de l'image de Gauss causé par Φ_1 peut s'écrire

$$\zeta(a') = \gamma \mathcal{L}\{\Phi_1\},$$

le symbole $\mathcal{L}$ ayant la signification indiquée plus loin (50)

Equation complète (42) : expression de l'aberration.

— L'expression (48) fournit la solution générale approchée de (42) puisque α est un terme correctif.

On peut obtenir une solution plus rigoureuse à l'aide d'approximations successives, en se bornant ici à la première approximation; il s'agit là d'une méthode classique dans les problèmes d'aberrations [7]. α étant une fonction de la solution $s(z)$ elle-même, on y remplace $s(z)$ par la valeur approchée (48); nous sommes ainsi ramenés à une équation du même type que (45) c'est-à-dire linéaire et de terme non homogène connu. La solution peut en vertu de la linéarité être considérée comme étant la somme :

Solution générale de (45) + solution particulière de $\{\Phi_0 s\} + \alpha = 0$.

Cette dernière s'écrit sous la forme (47) à condition d'y remplacer $\left[-\frac{\bar{\Phi}_1}{2} \right]$ par $\alpha(c_1 s_{10} + c_2 s_{01} + \zeta)$ de sorte que l'intégrale générale de (42) est en définitive

$$s = c_1 s_{10} + c_2 s_{01} + \zeta - \frac{1}{s'_{01}(a) \sqrt{\Phi_0(a)}} \times \int_a^z \frac{s_{10}(t)s_{01}(z) - s_{01}(t)s_{10}(z)}{\sqrt{\Phi_0(t)}} \alpha(c_1 s_{10} + c_2 s_{01} + \zeta)(t) dt.$$

Il est possible de déterminer en fonction de c_1 et c_2

les paramètres suivants d'une signification physique simple :

u , affixe du point objet origine;
 v , affixe du point d'impact de la trajectoire dans le plan du diaphragme, rapportée au centre de D (l'affixe par rapport à Oz en est donc $v_0 + v$) (fig. 15).

Inversement, nous remplacerons c_1 et c_2 en fonction de u et v , ce qui donne

$$s = us_{10} + [v + v_0 - \zeta(d)]s_{01} + \zeta + \frac{1}{s'_{01}(\alpha)\sqrt{\Phi_0(\alpha)}} \\ \times \left[s_{10}(z) \int_{\alpha}^z s_{01}(t) - s_{01}(z) \int_d^z s_{10}(t) \right] \\ \times \frac{\alpha [us_{10} + (v + v_0 - \zeta(d))s_{01} + \zeta](t)}{\sqrt{\Phi_0(t)}} dt.$$

Les trois premiers termes du deuxième membre fournissent une trajectoire de Gauss, reliant A et A'_0 ; en conséquence, le dernier terme représente l'écart entre cette trajectoire et une trajectoire réelle.

La valeur de ce terme pour $z = a'$, soit w , est l'affixe représentative de l'écart $A'_0 A'$ existant dans le plan image, entre l'image de Gauss et l'impact exact du rayon défini par les paramètres u , v (fig. 15).

C'est l'aberration propre au rayon (u , v) mesurée dans le plan image; son expression peut se mettre sous la forme

$$(49) \quad A'_0 A' \equiv w = \gamma \mathcal{L} \alpha [us_{10} + (v + v_0 - \zeta(d))s_{01} + \zeta],$$

en posant

$$(50) \quad \mathcal{L} f(z) = \frac{1}{\sqrt{\Phi_0(\alpha)}} \int_{\alpha}^{a'} \frac{S(t)}{\sqrt{\Phi_0(t)}} f(t) dt.$$

Le symbole $\mathcal{L}$ représente un opérateur faisant correspondre à toute fonction $f(z)$ celle définie par la formule précédente. On remarquera que $\mathcal{L} f(z)$ est une fonction continue de la position a de l'objet, même au voisinage du foyer.

Étant donnée d'autre part l'expression de α [(42), (43)], la notation $\alpha []$ représente la fonction obtenue en y remplaçant s , ses dérivées et conjugués, par la quantité entre crochets, ses dérivées et conjugués.

Rappelons que les formules ainsi obtenues ne fournissent que la première approximation, c'est-à-dire la partie principale en ce qui concerne le rôle optique du terme α ; l'expérience de son côté ne donne pas autre chose. Aussi n'y a-t-il lieu de tenir compte que de la partie principale de α : les éléments du développement de (41) que nous n'avons pas écrits sont, en s , de degré supérieur à 3 et par suite sont à négliger.

On pourra omettre également les termes suivants

$$\{\Phi_2 s^3\} \text{ masqué par } \{\Phi_2 s\}, \\ \{\Phi_3 s^3\}, \{\Phi_4 s^3\} \text{ même observation, car } \Phi_3 \text{ et } \Phi_4$$

sont, sauf cas spéciaux, du même ordre de grandeur que Φ_2 ; ces termes ont leur origine dans de mêmes défauts géométriques globaux affectant *a priori* de façon semblable les divers ordres de symétrie.

10. Aberrations : divers types.

$\mathcal{L}$ étant un opérateur linéaire d'après sa définition (50), si l'on remplace α par sa valeur (42) dans la formule (49) donnant l'aberration w du rayon (u , v), on voit que w est un polynôme du troisième degré en u , $\bar{u}$, v , $\bar{v}$. Ses coefficients se calculent à l'aide d'intégrales faisant intervenir les composantes du champ et deux trajectoires particulières du système idéal; ils ne sont pas indépendants les uns des autres en raison de l'existence de surfaces d'ondes normales aux rayons. On précisera ce point suivant un procédé dont l'application aux systèmes rigoureusement centrés est classique.

Considérons dans l'espace image (dénué de champ) la famille des surfaces d'onde correspondant au point objet A

$$\Omega(xyz) = C,$$

on peut supposer $|\text{grad } \Omega| = 1$, ces surfaces étant parallèles.

Soient $p(xyz)$, $q(xyz)$ les cosinus directeurs du rayon passant par le point (xyz); ils sont reliés à $\Omega(xyz)$ par $p = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$, $q = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$, d'où résulte l'égalité $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Nous exprimons cette dernière relation en tout point du plan du diaphragme, en supposant ce dernier situé effectivement dans l'espace image; on vérifie aisément qu'on peut l'écrire encore

$$\text{Partie imaginaire} \left[\frac{\partial(p + iq)}{\partial v} \right] = 0$$

p et q s'explicitent d'autre part, en fonction des coordonnées du rayon dans les plans $z = d$ et $z = a'$, c'est-à-dire en fonction de v et w . On trouve ainsi que la partie principale de l'expression précédente est simplement $\frac{\partial(w - v)}{\partial v}$.

La condition s'écrit par suite

$$(51) \quad \text{p. im.} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) = 0,$$

d'où découlent certaines relations entre les coefficients du polynôme w .

Le cas où D ne serait pas dans l'espace image conduirait à la même conclusion.

Passons maintenant à l'examen de la figure d'aberration fournie par l'ensemble des rayons issus de A ; on l'obtient en portant à partir de A'_0 les diverses affixes $A'_0 A' = w$ correspondant à l'ensemble des valeurs de ρ décrivant l'ouverture du diaphragme : $|\rho| \leq V$.

L'étude de cette figure nécessite donc l'étude de w considéré comme polynôme en ρ et $\bar{\rho}$, la variable u ne figurant que dans les coefficients variables seulement d'un point A à un autre. Les divers termes de ce polynôme constituent autant de composantes de l'aberration totale, dont chacune présente une structure caractéristique. On en observe la superposition, mais suivant les circonstances certains peuvent être prépondérants de sorte que les composantes correspondantes sont alors bien apparentes.

Si nous prenons d'abord le cas particulier d'un système strictement de révolution ($\Phi_m \equiv 0$ pour $m \geq 1$), w se met sous la forme bien connue

$$w = w_d + w_c + w_a + w_k + w_\sigma,$$

où les divers termes sont

$$(52) \quad \begin{cases} w_d = \gamma D_1 u^2 \bar{u} & \text{distorsion,} \\ w_c = \gamma C_1 u \bar{u} \rho & \text{courbure du champ,} \\ w_a = \gamma A_1 u^2 \rho & \text{astigmatisme,} \\ w_k = \gamma (K_1 \bar{u} \rho^2 + 2 \bar{K}_1 u \rho \bar{\rho}) & \text{coma} \\ w_\sigma = \gamma \sigma \rho^2 \bar{\rho} & \text{aberration sphérique,} \end{cases}$$

Dans le cas général nous trouvons tout d'abord des termes de même structure en ρ et $\bar{\rho}$ que les précédents, et présentant par suite les mêmes significations géométriques que nous rappellerons [4], [7].

1° Terme de degré 0 : Distorsion

$$(53) \quad w_d = \gamma (D_1 u^2 \bar{u} + D_2 u^2 + D_3 u \bar{u} + D_4 u + D \bar{u} + D'),$$

w_d est fourni par le rayon moyen du faisceau ($\rho = 0$); il existe pratiquement seul si le diaphragme D est suffisamment étroit : à chaque point objet A correspond alors un point d'impact A' constituant l'élément d'une pseudo-image déformée de l'objet.

2° Termes en ρ et $\bar{\rho}$:

Courbure du champ :

$$(54) \quad w_c = \gamma \rho (C_1 u \bar{u} + C_2 u + \bar{C}_2 \bar{u} + C),$$

Astigmatisme :

$$(55) \quad w_a = \gamma \bar{\rho} (A_1 u^2 + A_2 u + A).$$

(C_1, C, A sont réels). Le faisceau émergent s'appuie sur deux focales rectangulaires; une section intermédiaire constitue le cercle de moindre diffusion. — On note les deux cas particuliers suivants :

$w_c = 0$ (cercle de moindre diffusion dans le plan conjugué P'),

$w_a = 0$ (focales confondues en un point).

3° Termes en ρ^2 et $\rho \bar{\rho}$: Coma

$$(56) \quad w_k = \gamma \rho^2 (K_1 \bar{u} + K) + 2 \gamma \rho \bar{\rho} (\bar{K}_1 u + \bar{K})$$

section par P' en pointe dont l'angle est de 60° .

4° Terme en $\rho^2 \bar{\rho}$: Aberration sphérique :

$$(57) \quad w_\sigma = \gamma \sigma \rho^2 \bar{\rho}, \quad [\sigma \text{ est réel}].$$

section par P' circulaire.

On verra facilement que ces divers termes ont comme origines possibles les éléments $\{\}$ de $\mathcal{A}$ suivants :

Distorsion.....	tous les $\{\}$
Astigmatisme.....	$\{\}$
Courbure du champ.....	$\{\Phi_0 s^3\} \quad \{\Phi_1 s^2\}$
Coma.....	$\{\}$
Aberration de sphéricité.....	$\{\Phi_0 s^3\}$

5° Termes caractéristiques de dissymétries d'ordre > 2

— Ce sont des termes en $\bar{\rho}^2$ et $\bar{\rho}^3$ dus respectivement à $\{\Phi_3 s^2\}$, $\{\Phi_4 s^3\}$; il leur correspondrait des sections circulaires par le plan P' . Du fait de leur association avec des termes des types précédents l'on peut aisément se rendre compte que les sections observées sur le faisceau présentent des formes en rosaces de même ordre de symétrie.

Rappelons du reste que les aberrations de cette dernière rubrique n'apparaîtront pas, à moins que celles dues à $\{\Phi_2 s\}$ ne soient nulles.

En raison de la continuité de l'expression (50) en fonction de l'abscisse a , les divers coefficients littéraux des formules précédentes, à l'exception de γ , sont eux aussi des fonctions continues de la position de l'objet : il en résulte que pour un objet situé au voisinage du foyer objet, les aberrations varient comme le grandissement γ .

11. Défauts de l'image : déformation, limite de résolution.

L'image totale de l'objet obtenue dans le plan P' a une forme donnée approximativement par les points d'impact des rayons moyens des faisceaux : sa déformation par rapport à l'objet provient de la distorsion w_d .

La tache d'aberration non ponctuelle impose d'autre part une *limite de résolution* : ce phénomène est déterminé par les autres composantes d'aberration fonctions de v et $\bar{v}$.

DÉFORMATION. — Nous pouvons l'étudier en chaque point. Plaçons-nous au point objet A d'affixe u ; si nous considérons le vecteur objet du , placé au voisinage, il lui correspond, compte tenu de la distorsion, un vecteur image

$$\gamma du + d\omega_d,$$

$d\omega_d$ représentant la dérivée totale de la fonction ω_d (53); autrement dit, le vecteur du est reproduit avec un grandissement qui est non pas γ , mais

$$\gamma + d\gamma = \frac{\gamma du + d\omega_d}{du} = \gamma + \frac{d\omega_d}{du}.$$

Cette valeur est en général complexe, ce qui traduit simplement le fait que l'objet et son image forment un certain angle. On peut écrire encore

$$(58) \quad \gamma + d\gamma = \left(\gamma + \frac{\partial \omega_d}{\partial u} \right) + \frac{\partial \omega_d}{\partial \bar{u}} \frac{d\bar{u}}{du}.$$

Le premier terme en est isotrope, c'est-à-dire indépendant de la direction de du ; au cas où il existe seul, les formes et par suite les angles sont conservés dans la reproduction du voisinage du point u .

Le deuxième terme est anisotrope : son module $\left| \frac{\partial \omega_d}{\partial \bar{u}} \right|$ est indépendant de la direction de du , mais son argument ne l'est pas; il traduit une déformation de l'image de l'objet au voisinage.

On voit ainsi que $\gamma + d\gamma$ varie entre les deux valeurs

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} &= \gamma + \frac{\partial \omega_d}{\partial u} + \left| \frac{\partial \omega_d}{\partial \bar{u}} \right|, \\ \gamma_{\min} &= \gamma + \frac{\partial \omega_d}{\partial u} - \left| \frac{\partial \omega_d}{\partial \bar{u}} \right|. \end{aligned}$$

obtenues ainsi qu'on peut le voir, aisément, pour deux directions du rectangulaires.

Passons aux conséquences pratiques : l'image dans son ensemble ne serait semblable à l'objet que si l'on avait

$$\gamma + d\gamma \text{ indépendant de } u.$$

c'est-à-dire en vertu de (53)

$$(58) \quad \omega_d = \gamma(D_2 u + D').$$

En dehors de cette éventualité exceptionnelle, il est permis de considérer comme favorable celle où l'image donne de l'objet une carte respectant loca-

lement les formes (conservation des angles) (cf. cartes géographiques), ce qui aura lieu pour

$$(59) \quad \frac{\partial \omega_d}{\partial \bar{u}} = 0.$$

Si cette relation a lieu en tout point, ω_d est fonction analytique de la variable complexe u , résultat bien connu par ailleurs dans la théorie des fonctions

$$\omega_d = \gamma(D_2 u^2 + D_3 u + D').$$

Dans le cas général la déformation, c'est-à-dire le défaut fondamental introduit par la distorsion pourra se mesurer en chaque point u par le rapport

$$(60) \quad \Delta = \frac{\gamma_{\max} - \gamma_{\min}}{\gamma} = \frac{2}{\gamma} \left| \frac{\partial \omega_d}{\partial \bar{u}} \right|.$$

Un petit cercle tracé au voisinage de u a pour image une ellipse dont l'expression précédente représente l'ellipticité.

LIMITE DE RÉOLUTION. — Si nous passons maintenant aux aberrations définies par les rubriques 2, 3, 4, 5, l'une d'elles sera en pratique prépondérante pour chaque point A . Supposons pour fixer les idées qu'il s'agisse de l'astigmatisme; A donne une tache circulaire dans le plan P' , dont le rayon est en vertu de (55)

$$\gamma |A_1 u^2 + A_2 u + A| V.$$

La limite de résolution imposée par cet astigmatisme en est la quantité conjuguée dans l'espace objet

$$(61) \quad \varpi = |A_1 u^2 + A_2 u + A| V.$$

On évaluerait de la même manière les limites dues à d'autres composantes (aberration sphérique : $\varpi = \sigma V^3$) sauf en ce qui concerne le coma : ce dernier exigerait le cas échéant des considérations différentes du fait qu'il ne fournit pas une tache circulaire.

On pourra remplacer V en fonction de l'angle d'ouverture α du faisceau

$$(62) \quad \alpha = V s'_{01}(\alpha)$$

et obtenir des expressions en α dont les coefficients définissent les constantes d'aberration correspondantes.

Considérons les grandeurs telles que les fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \dots$, les affixes u, V , l'ouverture α , comme étant des quantités de même ordre infinitésimal; on voit que l'ordre infinitésimal de ϖ est égal à celui de l'accolade qui lui donne naissance. Il en résulte que l'ellipticité donne une limite de réso-

lution du deuxième ordre, les autres termes $\{\Phi_0 s^3\}$, $\{\Phi_1 s^2\}$, ..., donnent des limites du troisième ordre au moins; on conçoit ainsi que l'ellipticité des lentilles, c'est-à-dire leurs dissymétries d'ordre $m=2$, interviennent a priori en tout premier lieu pour limiter le pouvoir séparateur.

Avant d'envisager cette question plus particulièrement on observera qu'une discussion complète de la limite de résolution devrait faire intervenir d'autres facteurs sortant du cadre de cette étude : diffraction... [4], [8]. Rien n'oblige d'autre part à observer l'image dans le plan P' : l'observation directe de la figure géométrique montre que si l'on reçoit l'« image » sur un plan parallèle à P' et voisin, l'aberration s'y trouve décrite par une expression de la forme $w + \gamma b v$, b constante); on observe donc les mêmes composantes (53) à (57) sauf en ce qui concerne le terme $\gamma C v$ de courbure du champ : ce dernier devient $\gamma (C + b) v$ et peut ainsi s'annuler par un choix convenable du plan de visée.

12. Calcul de la limite de résolution dans le cas de dissymétrie $m = 2$ (ellipticité).

Dans le cas de l'aberration d'ellipticité dont on a signalé l'importance, l'équation à résoudre est

$$\{\Phi_0 s\} + \{\Phi_2 s\} = 0$$

c'est-à-dire

$$(63) \quad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{\Phi''_0}{4} s - \frac{1}{4} \bar{\Phi}_2 s = 0.$$

On pourrait l'obtenir facilement par un calcul direct. Elle équivaut à un système d'équations différentielles linéaires et réelles en x et y , et il en résulte des propriétés simples.

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse suivante, déjà envisagée dans l'étude d'une lentille électrostatique particulière : le plan $\theta = 0$ est le plan de symétrie.

Il s'agit là d'un cas classique [9], [10] de systèmes électroniques dont nous allons retrouver rapidement les résultats. On voit que $\varphi_2 \neq 0$, $\varphi'_2 = 0$; la fonction $\Phi_2(z)$ est par suite réelle en vertu de (6), de sorte que le système équivalent à (63) s'écrit

$$(64) \quad \begin{cases} \Phi_0 x'' + \frac{\Phi'_0}{2} x' + \frac{\Phi''_0 - \Phi_2}{4} x = 0, \\ \Phi_0 y'' + \frac{\Phi'_0}{2} y' + \frac{\Phi''_0 + \Phi_2}{4} y = 0. \end{cases}$$

Les fonctions $x(z)$, $y(z)$ sont déterminées de façon indépendante : les trajectoires en projection suivant le plan yOz suivent les lois de l'optique de Gauss en faisant intervenir un premier système de

points cardinaux; de même celles en projection suivant le plan xOz mettent en jeu un deuxième système de points cardinaux, très voisin du premier si Φ_2 est occasionné seulement par un écart.

La figure 17 représente ainsi la marche des rayons issus d'un point objet A , les deux projections suivant yOz , xOz étant supposées rabattues sur le plan de la figure. On voit apparaître un astigmatisme : le faisceau présente deux focales en A'_1 et A'_2 , respectivement parallèles à chacun des plans et de longueur indépendante de la position de A dans son plan de front. Il existe d'autre part une distorsion : dans le cas de la figure 17, l'image paraîtrait écrasée suivant la direction Oy .

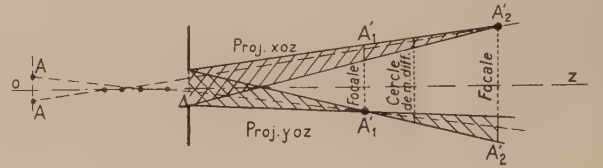


Fig. 17.

Le phénomène peut ainsi se décrire simplement en faisant appel à des constructions classiques d'optique géométrique.

Passons au cas général où n'existe pas de plan de symétrie [la fonction $\Phi_2(z)$ n'est plus réelle].

Nous tenons compte des autres écarts : $\Phi_1, \dots$, éventuels; la formule de l'aberration étant, d'après (49)

$$w = -\frac{1}{4} \gamma \left[\bar{u} \mathcal{L}(\bar{\Phi}_2 s_{10}) + \bar{v} \mathcal{L}(\bar{\Phi}_2 s_{01}) + [\bar{v} - \zeta(d)] [\mathcal{L}(\bar{\Phi}_2 s_{01}) + \mathcal{L}(\bar{\Phi}_2 \bar{\zeta})] \right].$$

Il en résulte toujours une *distorsion* (termes indépendants de $\bar{v}$) et un *astigmatisme indépendants de la position de A* (terme en $\bar{v}$). L'absence de courbure du champ indique que le cercle de moindre diffusion se trouve dans le plan P' conjugué de l'objet dans le système idéal Σ_0 . Il est possible de voir que les propriétés simples de construction suivant deux projections s'appliquent toujours si les focales sont suffisamment lointaines.

Nous effectuerons le calcul de la limite du pouvoir séparateur imposée par l'ellipticité; c'est en vertu de (61)

$$(65) \quad w = \left| -\frac{1}{4} \mathcal{L}[\bar{\Phi}_2(z) s_{01}(z)] \right| V$$

c'est-à-dire d'après (50) et en remplaçant V en fonction de α angle d'ouverture du faisceau

$$(66) \quad w = \frac{1}{4 \sqrt{\Phi_0(\alpha)}} \left| \int_{\alpha}^{\alpha'} \frac{\bar{\Phi}_2(t) [S(t)]^2}{\sqrt{\Phi_0(t)}} dt \right| \alpha.$$

Appliquons au cas de la lentille déjà envisagée jouant le rôle d'*objectif de microscope*, l'*ellipticité affectant son électrode centrale*.

Les fonctions $\Phi_0(z)$ et $S(z)$ sont connues par l'étude préalable de la lentille idéale [3]; on a d'autre part, déterminé la fonction $\Phi_2(z)$ (relation 37).

Des considérations d'homogénéité montrent que l'on doit s'attendre à une relation du type

$$\varpi = K \delta_{\max} \alpha,$$

où K est un nombre déterminé pour une famille de lentilles et de défauts homothétiques, ce qui permet d'effectuer le calcul en donnant aux deux paramètres électrique $\Phi_0(a)$ et géométrique R des valeurs arbitraires.

Le calcul donne dans ces conditions : $K \approx 5$. Si l'on remarque que la différence des deux axes de l'ellipse de gorge est $\Delta a = 4 \delta_{\max}$, on pourra encore écrire, les évaluations n'étant qu'approchées

$$(67) \quad \boxed{\varpi = \Delta a \alpha.}$$

Δa définit ce qu'on peut appeler la *constante de l'aberration d'ellipticité*.

Voyons à quelle condition l'on aura par exemple

$$\varpi = 1 \text{ m}\mu \quad \text{pour} \quad \alpha = 3,10^{-3}.$$

C'est un ordre de grandeur au-dessous duquel on peut admettre que le défaut elliptique n'intervient pas pour limiter le pouvoir séparateur. Il correspond suivant (67) à $\Delta a = 0,3 \mu$ ou $\delta_{\max} = 0,1 \mu$.

On voit que la *symétrie axiale de l'ouverture de la lentille doit être réalisée avec une précision considérable* si l'on veut que l'ellipticité ne limite pas son pouvoir séparateur.

L'étude expérimentale du microscope électrostatique justifie cette conclusion [11], dont on a indiqué plus haut la raison essentielle.

Remarques concernant le rôle des autres pièces. — Les résultats obtenus supposent que le rôle des défauts de symétrie des pièces autres que l'électrode centrale de l'objectif soit négligeable, si l'on veut qu'on puisse parler du pouvoir séparateur du microscope global; on justifie aisément ce point. En ce qui concerne, d'une part, les électrodes latérales de l'objectif, elles donnent un potentiel correctif φ , et par suite, une fonction $\Phi_2(z)$ réduits par le fait que E reste nul ou faible sur la plus grande partie de leur surface voisine de l'axe; de plus $\Phi_0(z)$ garde pratiquement sa valeur maximum dans la zone d'action correspondante ce qui diminue encore la contribution dans (66).

Quant à la lentille de projection, $[S(z)]^2$ présente dans sa zone, des valeurs bien plus faibles que dans celle de l'objectif, de sorte qu'on peut également ne pas tenir compte de ses défauts propres, à moins qu'ils ne soient sensiblement plus prononcés que ceux de l'objectif.

13. Cas général où existent champ électrique et magnétique (exemple : microscope magnétique).

ÉQUATION DES TRAJECTOIRES. — S'il existe un champ magnétique de potentiel scalaire $\psi(r, z, 0)$, il nous faut développer l'équation générale (41) dans sa totalité, c'est-à-dire ajouter le développement de son dernier terme

$$i\eta \sqrt{z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} s' - 2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \right)$$

à l'expression figurant dans (42).

Il apparaît ainsi, par rapport à (42), les termes nouveaux

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_0 s \right\} \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_0 s^3 \right\} & \text{mettant en jeu l'ordre} \\ & \text{de symétrie} \dots \dots \dots m=0 \\ \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_1 \right\} \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_1 s^2 \right\} & \\ \left\{ \frac{\Psi_0 \Phi_1}{\sqrt{\Phi_0}} s^2 \right\} \left\{ \frac{\Phi_1 \Psi_1}{\sqrt{\Phi_0}} s \right\} & \text{»} \dots \dots \dots m=1 \\ \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_2 s \right\} & \text{»} \dots \dots \dots m=2 \\ \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_3 s^2 \right\} & \text{»} \dots \dots \dots m=3 \end{array} \right.$$

On donne aux accolades la même signification que dans le cas du champ purement électrique. Si l'on suppose d'autre part que le système ne s'éloigne de la symétrie de révolution que par des écarts : $(\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2, \dots)$, petits) la liste précédente donne les termes principaux, c'est-à-dire qu'elle ne tient pas compte, pour une raison déjà mentionnée, des termes qui seraient constamment « masqués » par les autres.

Nous n'écrirons que les valeurs des accolades les plus importantes :

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_1 \right\} = -i\eta \sqrt{\Phi_0} \bar{\Psi}_1, \\ \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_0 s \right\} = i\eta \sqrt{\Phi_0} \left(\Psi_0^1 s' + \frac{1}{2} \Psi_0^3 s \right), \\ \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_2 s \right\} = -\frac{i\eta}{2} \sqrt{\Phi_0} \bar{\Psi}_2 s. \end{array} \right.$$

L'équation des trajectoires est alors

$$(70) \quad \left\{ \Phi_0 s \right\} + \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_0 s \right\} + \left\{ \Phi_1 \right\} + \left\{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_1 \right\} + \alpha = 0.$$

α désigne maintenant l'ensemble des termes restants des tableaux (43) et (68).

Pour la simplicité nous utiliserons le procédé connu consistant à rapporter les affixes s dans les divers plans, non pas à une origine de direction fixe, mais à une *origine de direction définie par un angle*

$$(71) \quad \omega(z) = \int_a^z \frac{\eta}{2} \frac{\Psi'_0}{\sqrt{\Phi_0}} dz.$$

Il suffit pour cela de remplacer partout la notation s par $se^{-i\omega}$. On trouve que (70) s'écrit avec cette nouvelle convention

$$(72) \quad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{1}{4} [\Phi_0'' + \eta^2 (\Psi'_0)^2] s - \left(\frac{\bar{\Phi}_1}{2} + i\eta \sqrt{\Phi_0 \bar{\Psi}_1} \right) e^{i\omega} + \mathcal{B} = 0,$$

en posant $\mathcal{B}(s) = \mathcal{A}(se^{-i\omega}) e^{i\omega}$.

ABERRATIONS. — Cette équation générale des trajectoires se traite comme l'équation (42) du cas purement électrique et il suffira de passer en revue rapidement les divers aspects de la résolution.

Dans les champs de symétrie axiale et pour l'A G, on a l'équation homogène à coefficients réels

$$(73) \quad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{1}{4} [\Phi_0'' + \eta^2 (\Psi'_0)^2] s = 0,$$

traduisant les propriétés connues de focalisation.

Les champs affectés d'une dissymétrie d'ordre $m=1$ sont régis dans le cas de l'A G par

$$(74) \quad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{1}{4} [\Phi_0'' + \eta^2 (\Psi'_0)^2] s - \left(\frac{\bar{\Phi}_1}{2} + i\eta \sqrt{\Phi_0 \bar{\Psi}_1} \right) e^{i\omega} = 0,$$

équation qui n'est plus homogène, mais conserve encore les propriétés de focalisation; si nous désignons par $s = \zeta(z)$ la trajectoire confondue avec Oz dans le milieu objet, la dissymétrie $m=1$ ne fait qu'imprimer aux images le décalage transversal $\zeta(z)$ (fig. 14).

Dans le cas général, où les approximations précédentes ne suffisent pas, on voit apparaître des aberrations du fait que l'équation (72) n'est plus analytique en s .

Gardons les mêmes notations que dans le cas purement électrique; on devra seulement ne pas oublier que maintenant les trajectoires et également les affixes v_d, u, v, w sont rapportées à des directions origines variables d'un plan complexe à un autre suivant la loi (71).

Dans ces conditions l'aberration propre au rayon (u, v) est

$$(75) \quad A'_0 A' \equiv w = \gamma \mathcal{L} \mathcal{B} [us_{10} + (v + v_0 - \zeta(d)) s_{01} + \zeta],$$

l'opérateur $\mathcal{L}$ étant toujours défini par (50).

Il en résulte des conséquences du même ordre que celles de la première étude : si l'espace image est dénué de champ, il apparaît des composantes : *distorsion, courbure de champ, astigmatisme, aberration sphérique*, définies respectivement par les formules des types (53) à (57). Remarquons toutefois que les constantes D_1, A_1 et K_1 sont, d'après leurs expressions sous formes d'intégrales, toujours réelles pour un champ électrostatique pur, alors qu'elles sont complexes dans le cas général envisagé actuellement; cette propriété donne naissance aux particularités classiques connues sous les noms de *distorsion, astigmatisme et coma anisotropes*.

Ici encore l'aberration due à une dissymétrie d'ordre $m=2$ (ellipticité) de pièces magnétiques présente une importance particulière. L'équation s'écrit

$$(76) \quad \Phi_0 s'' + \frac{\Phi'_0}{2} s' + \frac{1}{4} (\Phi_0'' + \eta^2 (\Psi'_0)^2) s - \frac{i\eta}{2} \sqrt{\Phi_0 \bar{\Psi}_2} e^{-2i\omega} \bar{s} = 0.$$

Elle met en évidence une distorsion et un astigmatisme; ce dernier est proportionnel à l'ouverture α et de même que dans le cas purement électrique, on peut s'attendre à ce que l'ellipticité limite le pouvoir séparateur si la symétrie axiale n'est pas réalisée avec une grande précision. Hillier l'a constaté expérimentalement dans le microscope magnétique [12].

CAS OU LE CHAMP MAGNÉTIQUE EST DU A UNE INFLUENCE PARASITE EXTÉRIEURE. — Au lieu de considérer un microscope magnétique, nous supposons avoir maintenant affaire à un *microscope électrostatique perturbé par des champs magnétiques extérieurs* : champ terrestre, champs créés par des sources d'alimentation ou des moteurs placés au voisinage (blindage insuffisant). Nous admettrons pour simplifier que le champ résultant est pratiquement uniforme ou du moins présente une variation assez faible pour qu'on puisse négliger ses dérivées par rapport aux coordonnées. On voit aisément, en ne reportant aux expressions générales des composantes du champ

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad -2 \frac{\partial \psi}{\partial s},$$

que les seules grandeurs magnétiques dont nous ayons à tenir compte dans les expressions des accolades sont : Ψ_0, Ψ'_0, Ψ_1 .

Dans le cas actuel il est inutile de considérer un repérage des affixes variable en fonction des plans de front; nous prenons à nouveau une même direction origine, pour tous ces plans. L'équation des trajectoires est (70) et les termes introduits par le champ magnétique se réduisent à

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_0 s \} = i \eta \sqrt{\Phi_0} \Psi_0' s', \\ \{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_1 \} = -i \eta \sqrt{\Phi_0} \bar{\Psi}_1, \\ \left\{ \frac{\Phi_1}{\sqrt{\Phi_0}} \Psi_1 s \right\} = -\frac{i \eta \bar{\Psi}_1}{4 \sqrt{\Phi_0}} (\Phi_1 s + \bar{\Phi}_1 \bar{s}), \\ \{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_1 s^2 \} = \frac{i \eta}{8 \sqrt{\Phi_0}} \bar{\Psi}_1 \Phi_0'' s \bar{s} \end{array} \right\} \alpha.$$

On observera que le *champ parasite s'étendant également à l'espace image*, on n'a plus nécessairement la relation (51) qui, on l'a vu, particularise la forme de certaines aberrations. Effectivement, l'aspect des termes de α montre que le polynôme ω comprend :

des termes indépendants de ν : distorsion;

des termes en ν et en $\bar{\nu}$: courbure du champ et astigmatisme;

un terme en $\nu \bar{\nu}$ non accompagné de terme en ν^2 et qui, par suite ne rentre pas dans les rubriques obtenues jusqu'à présent.

On verra aisément que si cette dernière aberration est supposée exister seule, le faisceau émergeant s'appuie sur une focale unique située dans le plan P' .

LES ABERRATIONS A L'APPROXIMATION RELATIVISTE.
— Si la tension d'accélération atteint des valeurs suffisantes (une centaine de kV), l'étude doit en toute rigueur s'effectuer conformément à la mécanique relativiste. Les trajectoires sont encore données par un principe de moindre action à partir d'une intégrale

$$\int_A^{A'} \mu d\sigma,$$

et l'on a maintenant [13]

$$\mu = (\varphi + \eta'^2 \varphi^2)^{\frac{1}{2}} - \eta' A \frac{d\sigma}{d\tau}$$

$$\eta' \equiv \frac{\eta}{300}.$$

Il en résulte que les calculs se déroulent de la même manière que précédemment, à condition de remplacer φ par $\varphi + \eta'^2 \varphi^2$, ce qui conduit aux substitu-

tutions

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0 \rightarrow \Phi_0 (1 + \eta'^2 \Phi_0), \\ \Phi_1 \rightarrow \Phi_1 (1 + 2 \eta'^2 \Phi_0), \\ \Phi_2 \rightarrow \Phi_2 (1 + 2 \eta'^2 \Phi_0) + 2 \eta'^2 (\Phi_1)^2, \\ \Phi_0^2 \rightarrow \Phi_0^2 (1 + 2 \eta'^2 \Phi_0) - 2 \eta'^2 \Phi_1 \bar{\Phi}_1. \end{array} \right.$$

Les coefficients des développements de $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{s}}$ que fait intervenir l'équation (41) ne sont pas différents des précédents; ceux de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$ sont à substituer suivant

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0' \rightarrow \Phi_0' (1 + 2 \eta'^2 \Phi_0), \\ \Phi_1' \rightarrow \Phi_1' (1 + 2 \eta'^2 \Phi_0) + 2 \eta'^2 \Phi_0' \Phi_1, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

L'étude des aberrations n'offrira pas de changement, à ces transformations près; (66) et (78) montrent par exemple que la composante d'ordre 2, Φ_2 , est toujours responsable d'un astigmatisme d'ellipticité, d'expression (en négligeant $(\Phi_1)^2$)

$$(80) \quad \omega = \frac{1}{4 \sqrt{\Phi_0(a)} [1 + \eta'^2 \Phi_0(a)]} \times \left| \int_a^{a'} \frac{\bar{\Phi}_2 (1 + 2 \eta'^2 \Phi_0)}{\sqrt{\Phi_0 (1 + \eta'^2 \Phi_0)}} S^2 dt \right| \alpha.$$

Supposons la quantité $\eta'^2 \Phi_0$ très faible; on voit facilement que l'écart relatif entre les résultats des formules (66) et (80) atteint au plus la valeur $\eta'^2 \Phi_0(a)$, c'est-à-dire $1/10^6$ ($\eta'^2 \neq 10^{-6}$: équation (40)) pour une tension d'accélération de 100 kV.

De façon générale l'approximation relativiste ne modifie pas la physionomie des résultats mis en évidence au cours de l'étude.

CHAPITRE III.

CORRECTION D'ABERRATIONS.

L'étude précédente montre comment la sensibilité présentée par les trajectoires électroniques vis-à-vis des irrégularités des champs est à l'origine de défauts chez les instruments d'optique

On peut envisager la même question d'un point de vue favorable : grâce à la simplicité de réalisation d'un certain nombre de champs de symétries convenables, il est possible d'introduire sur le trajet des faisceaux, certains systèmes « correcteurs » ou « lentilles correctrices » : les champs de ces systèmes neutralisent les aberrations préexistantes, du moins partiellement; nous supposons, en outre, qu'ils n'introduisent ainsi que des termes correctifs.

En raison de son importance et de sa simplicité, nous nous occuperons tout d'abord du cas de l'astigmatisme d'ellipticité et verrons ensuite de quelle manière se présente le problème pour les défauts géométriques quelconques.

14. Correction de l'astigmatisme d'ellipticité (écarts d'ordre $m = 2$).

Dans le cas général des champs électrique et magnétique coexistants, cet astigmatisme peut s'écrire

$$(81) \quad \begin{cases} w = \gamma A \bar{v}, \\ A = \text{fonction linéaire de } \bar{\Phi}_2 \text{ et } \bar{\Psi}_2 \end{cases}$$

l'expression complète étant donnée par (75) avec

$$\alpha = \{ \Phi_{2s} \} + \{ \sqrt{\Phi_0} \Psi_{2s} \},$$

A est un facteur numérique complexe qu'on dénommera *vecteur* d'astigmatisme et qu'on ne risque pas de confondre avec la notation A du point objet. Il jouit de propriétés simples résultant essentiellement de la linéarité.

Ces propriétés concernent des électrodes $X, Y, \dots$ affectées de dissymétries d'ordre $m = 2$, indépendamment des autres dissymétries présentes; ces électrodes elles-mêmes étant soit des corps de révolution, mais de réalisation imparfaite, soit des pièces de formes quelconques mais portées à des tensions suffisamment faibles pour ne donner lieu qu'à des champs correctifs. Étant donnée l'une d'elles, nous dirons brièvement qu'elle est *isolée* si la distribution de potentiel d'ordre 2 qui en résulte ne subit aucune perturbation de la part d'un autre objet (cf. les conducteurs « isolés » de l'électrostatique); en raison de l'étendue réduite dont jouissent comme on l'a vu les zones d'action de ces distributions, une électrode sera pratiquement isolée s'il n'en existe pas d'autres tout au voisinage.

1. Si l'on fait tourner une électrode X isolée, d'un angle β autour de Oz , son champ d'ordre $m = 2$ tourne du même angle et, par suite, en raison de la variance des fonctions Φ_2 et Ψ_2 associées (multipliées par $e^{-2i\beta}$), le vecteur d'astigmatisme A créé par X est multiplié par $e^{2i\beta}$, ou si l'on veut, A tourne de l'angle 2β .

2. Les vecteurs A jouissent de propriétés d'additivité. Prenons d'abord un instrument Σ formé de plusieurs électrodes ou parties isolées $X, Y, \dots$. Soient $A, A', \dots$ les vecteurs dus aux ellipticités de $X, Y, \dots$ supposées chaque fois existant seules. Le vecteur d'astigmatisme de Σ lorsqu'elles sont toutes présentes est égal à la somme $A + A' + \dots$

Soient, d'autre part, plusieurs électrodes $X, Y, \dots$ isolées ou non, mais placées dans une région où le champ préexistant est nul; les tensions qui leur sont appliquées sont évaluées par rapport aux potentiels de ces régions elles-mêmes. Le vecteur d'astigmatisme dû à l'ensemble est encore régi par une loi additive :

A_X étant sa valeur quand les tensions respectives de $X, Y, \dots$ sont 1, 0, 0, ...;

A_Y étant sa valeur quand les tensions respectives de $X, Y, \dots$ sont 0, 1, 0, ...;

$$A = \varphi_X A_X + \varphi_Y A_Y + \dots$$

dans le cas général où les tensions ont les valeurs $\varphi_X, \varphi_Y, \dots$; le principe de « superposition » des potentiels se reporte en effet sur l'astigmatisme.

Une telle propriété s'applique aux systèmes correcteurs électriques sur lesquels nous raisonnerons en principe pour fixer les idées, mais il est clair que les systèmes magnétiques donneraient un énoncé analogue, à condition d'admettre qu'ils sont régis par des lois linéaires (perméabilité constante) et en faisant intervenir les intensités des courants magnétisants au lieu des tensions appliquées.

Le caractère vectoriel et les lois de composition correspondantes constitueront la base même des méthodes de correction; nous les voyons ici chez l'astigmatisme et nous les retrouverons plus loin dans le cas général.

CORRECTION A L'AIDE D'UNE ÉLECTRODE. — Étant donné l'instrument à corriger dont l'astigmatisme est défini par le vecteur A_Σ , on lui adjoindra une électrode quelconque X présentant une dissymétrie $m = 2$ et située, par exemple dans une zone de champ nul : X crée un vecteur A_X non nul en général. En agissant sur la tension et sur l'orientation de X par rapport à Oz , on peut multiplier A_X par $\varphi_X e^{2i\beta}$, c'est-à-dire lui donner une valeur quelconque : on pourra s'arranger pour avoir $A_X = -A_\Sigma$ et le vecteur d'astigmatisme total est alors nul, d'où résulte la correction.

Nous ferons, à ce sujet, quelques remarques valables d'ailleurs très généralement. Ces raisonnements ne font pas intervenir les natures des champs respectifs : un système électrique peut corriger indifféremment un instrument électrique ou magnétique : même remarque pour un système magnétique.

En vertu de (61) l'égalité en module de A_Σ et A_X exprime simplement que la limite de résolution imposée par l'ellipticité de la lentille correctrice doit être égale précisément à celle de l'instrument lui-même à corriger.

La plus grande latitude reste dans le choix de la forme et des dimensions de l'électrode X : elle peut être formée d'une ou de plusieurs pièces portées à la même tension; il est naturel toutefois de prendre une *disposition admettant Oz comme axe de symétrie* : cette symétrie se retrouvant sur la loi de potentiel résultante, on voit que cette dernière ne renfermera alors que des composantes d'ordre pair $F_0(z)$, $F_2(z)$, $F_4(z)$ dans le cas électrique, de sorte que l'électrode correctrice n'introduira aucun décalage latéral de l'image, ni en vertu de (43), *aucune aberration supplémentaire décelable*. On verra plus loin qu'elle n'exige pas de rectification de la mise au point, malgré la création possible d'une composante de potentiel F_0 d'ordre $m = 0$.

CORRECTION A L'AIDE DE DEUX ÉLECTRODES. — La méthode précédente exige qu'on dispose la pièce correctrice suivant une orientation bien définie. Cette orientation ne peut guère être déterminée expérimentalement sans plusieurs essais préalables.

L'électrode devant se trouver, en général, à l'intérieur de blindages dans l'enceinte à vide, ces essais se traduisent par des manipulations sinon longues, du moins fastidieuses; on peut les éviter, à condition de faire appel à une lentille Σ' de deux électrodes X , Y fixées une fois pour toutes. Soient A_X le vecteur d'astigmatisme de Σ' quand les tensions respectives sont $(1, 0)$, A_Y quand elles sont $(0, 1)$. Lorsque les tensions sont (φ_X, φ_Y) ce vecteur devient $\varphi_X A_X + \varphi_Y A_Y$; si A_X et A_Y ne sont pas parallèles, il suffira de donner aux deux tensions les valeurs déterminées de façon unique par $\varphi_X A_X + \varphi_Y A_Y = -A_\Sigma$ pour réaliser la correction. Au lieu du réglage d'une tension et d'une orientation comme dans la méthode précédente, nous avons ici à régler *deux tensions sans déplacement des pièces*. On montrera plus loin que *si les électrodes X et Y se déduisent l'une de l'autre par une rotation convenable (voisine de $\frac{\pi}{4}$) autour de Oz , et si, de plus, elles admettent un plan de symétrie passant par cet axe, A_X et A_Y sont égaux en module et perpendiculaires*.

La figure 18 fournit un exemple de cette disposition ainsi que le diagramme vectoriel définissant la correction (chaque électrode comporte deux sphères symétriques par rapport à Oz); on y suppose remplie la condition précédente.

Montrons comment on peut imaginer, avec ce montage, le *processus du réglage*. Posons

$$\varphi_X = \lambda \cos \omega, \quad \varphi_Y = \lambda \sin \omega.$$

Il sera avantageux de disposer d'un système potentiométrique d'alimentation en tension permettant, de façon commode, de *faire varier indépendamment ω et λ* et, par cela même, d'après la figure, le module et l'orientation du vecteur correcteur A .

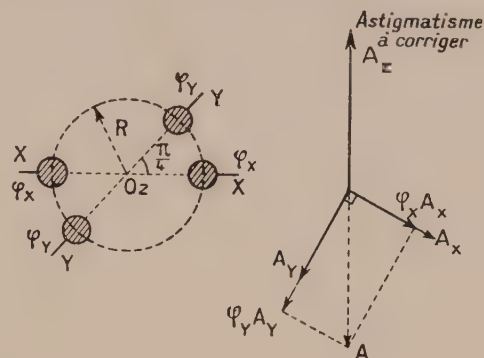


Fig. 18.

Dans ces conditions, on commencera par amener ce dernier suivant la direction de A_Σ en réglant ω ; on ajustera ensuite λ de façon à annuler la somme géométrique. Le contrôle expérimental de ces deux opérations s'effectuera par exemple à l'aide de faisceaux pratiquement homocentriques dont on observera la section elliptique en défocalisant légèrement la mise au point par rapport à P' : le parallélisme des deux vecteurs est atteint quand la mise sous tension du système correcteur ne change pas l'orientation des axes de cette section; la correction est d'autre part, réalisée lorsque cette section prend la forme circulaire.

Exemple numérique. — Effectuons la correction au moyen du système Σ' de la figure 18, l'origine O étant prise en son centre. Soient R le rayon du cercle sur lequel sont centrées les quatre sphères, ρ leur rayon. Nous supposons qu'au voisinage la trajectoire $S(z)$ du système parfait est pratiquement parallèle à l'axe de telle sorte que son affixe puisse être considérée comme constante $S(0)$; c'est le cas chez un microscope électrique si O se trouve dans l'espace intermédiaire suffisamment loin de l'image correspondante et de la lentille de projection. Nous évaluerons approximativement la *limite de résolution ω de l'instrument que peut corriger le système (X, Y) de tensions (φ_X, φ_Y)* .

D'après ce qui précède, nous pouvons raisonner comme si ces dernières étaient $(\sqrt{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2}, 0)$; le résultat reste le même.

ω étant égale à la limite de résolution imposée par l'ellipticité de Σ' lui-même, nous la calculerons de façon approchée en négligeant les phénomènes

d'influence entre les sphères; on obtient aisément, dans ces conditions, la composante créée par Σ' :

$$|F_2(z)| = 6R^2 \rho (z^2 + R^2)^{-\frac{5}{2}} \sqrt{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2},$$

d'où la relation (66) permet de déduire la valeur de ϖ [si $\Phi(a) = \Phi(0)$],

$$(82) \quad \varpi = \frac{2\rho [S(0)]^2}{R^2} \frac{\sqrt{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2}}{\Phi_0(0)} \alpha.$$

Cette expression montre que si l'on veut profiter au maximum des tensions φ_X et φ_Y dont on dispose, c'est-à-dire corriger les aberrations les plus grandes possibles, l'on a intérêt à placer la lentille Σ' de telle sorte que $S(0)$ soit maximum; pour un microscope, on pourra choisir l'emplacement à la sortie de l'objectif : dans ces conditions, $S(0) = f$ distance focale de ce dernier.

Appliquons à un système dans lequel $\rho = 1$, $R = 5$ mm, associé à un microscope de $f = 5$ mm, $\Phi_0(0) = 50\,000$ V (tension d'accélération) en vue de la correction d'une limite de résolution de $30\,m\mu$ pour $\alpha = 3 \cdot 10^{-2}$: la formule (82) donne

$$\sqrt{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2} = 250 \text{ V},$$

autrement dit, on devra disposer d'une source d'alimentation fournissant la gamme des tensions comprises entre ± 250 V si l'on veut corriger des astigmatismes déjà très notables.

Substituons maintenant au système électrique précédent celui des *systèmes magnétiques* qui en fournit l'équivalent (fig. 19). La même notation F_2

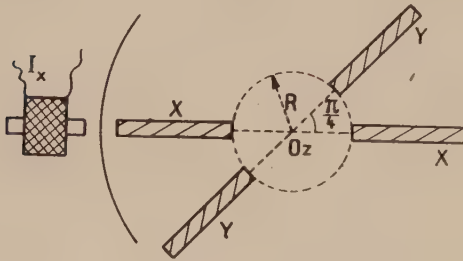


Fig. 19.

désigne ici le potentiel magnétique. Nous supposons les pôles placés aux extrémités des barreaux sur le même cercle de rayon R . Soient m_X et m_Y leurs masses en unités magnétiques C. G. S.

Pour calculer la limite de résolution ϖ propre à cet ensemble, il suffit de remplacer $\frac{1}{4}F_2$ par $\frac{\eta}{2}\sqrt{\Phi_0}F_2$, en vertu des valeurs des accolades $|F_2s|$ et $|\sqrt{\Phi_0}F_2s|$ qui figurent dans les cas respectifs; ϖ est au total

donné par la formule (82) à condition d'y remplacer les tensions φ_X par les expressions $\frac{2\eta}{\rho}\sqrt{\Phi_0}m_X \dots$

Soient NI_X et NI_Y les nombres d'ampères-tours des bobines magnétisantes, R_B le rayon moyen des enroulements auquel on assimilera celui des noyaux, μ la perméabilité magnétique du métal. En vue d'une évaluation approchée, on supposera chaque bobine créant en son centre un champ uniforme $\frac{2\pi NI_X}{10R_B}$ gauss ... dont les lignes de force sont canalisées sans pertes jusqu'aux pôles des barreaux; on en déduit aisément la relation suivante entre les masses et les courants

$$m_X = \frac{\pi R_B \mu NI_X}{20}, \quad \dots,$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\varphi_X \sim \frac{\pi \eta \mu}{10} \frac{R_B}{\rho} \sqrt{\Phi_0} NI_X,$$

le signe $\sim$ indiquant que les deux quantités jouent les mêmes rôles respectivement dans les cas électrique et magnétique.

On remplacera η par sa valeur $\eta = 0,295$ (gauss, volt); en gardant les valeurs numériques précédentes, avec, de plus $R_B = 5$ mm, $\mu = 500$, l'on obtient sensiblement

$$\varphi_X \sim 4,6 \cdot 10^4 NI_X \quad (\text{volt-ampère}).$$

Autrement dit, l'effet correcteur de 1 V appliqué au système électrique équivaut à celui de $2 \cdot 10^{-5}$ ampère-tour dans le système magnétique. L'aberration qui nécessitait, dans le premier cas, 250 V, exige, dans le deuxième cas, $5 \cdot 10^{-3}$ ampère-tour. Ce chiffre est vraisemblablement entaché d'une notable erreur par défaut en raison des approximations admises.

Les résultats précédents montrent, toutefois, que les lentilles correctrices ne nécessitent qu'une faible excitation : il suffit par exemple, pour ceux électriques, de *tensions de valeurs usuelles*, sans commune mesure avec la haute tension accélératrice des électrons.

Hillier et Ramberg [14] réalisent une correction de l'astigmatisme d'ellipticité chez un objectif magnétique à l'aide d'un procédé sensiblement plus délicat et de portée plus réduite; ils disposent huit tiges de fer doux en étoile à l'intérieur de la lentille et en règlent les positions de façon à *corriger le champ de la lentille elle-même*; il y a là une différence fondamentale avec les méthodes envisagées ici.

Les mêmes auteurs indiquent d'autre part un procédé précis de contrôle de la correction fondé sur l'observation de la première frange de diffraction.

15. Position générale du problème de compensation des aberrations.

On vient d'étudier le cas où l'aberration w a la valeur simple w_a donnée par (81). On peut envisager également la correction de l'aberration globale w d'un système Σ . w est un polynôme du troisième degré en $u, \bar{u}, v, \bar{v}$, dont nous avons vu l'expression des diverses composantes $w_d, w_c, w_a, w_k, w_\sigma$ [form. (53) à (57)], si l'on se borne aux cas où les dissymétries d'ordre $m > 2$ n'interviennent pas et où les champs parasites ne s'étendent pas jusqu'à l'image. On cherchera à résoudre le problème en *insérant un certain nombre de systèmes Σ' créant des termes correctifs dans la distribution de potentiel* (tension assez faible par rapport au milieu voisin) et dont on ne suppose rien *a priori* concernant la structure géométrique. On n'envisagera, pour des raisons de simplicité, que des Σ' placés en des régions de champ initialement nul (c'est-à-dire en dehors des lentilles) et respectivement « isolés ». Ces systèmes modifient les aberrations de Σ sans changer son rôle optique : si Σ est un microscope, il reste un microscope.

Étant donné l'instrument total formé de $\Sigma, \Sigma', \dots$ la valeur de l'aberration résultante est égale, en vertu de (49), à la somme des contributions respectives de $\Sigma, \Sigma', \dots$ que nous appellerons brièvement leurs aberrations propres.

Si l'on veut que l'image ne présente plus de défauts, du moins jusqu'au troisième ordre inclus, c'est-à-dire soit exempte de déformation et constituée d'éléments ponctuels, l'expression précédente doit se réduire à $\gamma(D_4 u + D)$; on verra plus loin qu'une telle réduction est impossible et, d'ailleurs, même s'il n'en était rien, il est clair que l'on se heurterait à de sérieuses difficultés pour réaliser expérimentalement une combinaison judicieuse de systèmes correcteurs permettant l'annulation simultanée des nombreux coefficients : $D_1, D_2, \dots$, (pour la plupart complexes) figurant dans l'aberration.

Reportons-nous d'abord aux systèmes idéaux, c'est-à-dire parfaitement de révolution. Leurs diverses composantes d'aberrations (52) sont nulles, sauf la dernière (sphéricité) au point $u = 0$. Par continuité, elles sont très faibles au voisinage, principalement en ce qui concerne les trois premières : si nous prenons en effet la distorsion w_d , sont nulles en $u = 0$ non seulement la déformation Δ [expression (60)], mais encore sa dérivée totale par rapport à u ; quant à w_c et w_a , leurs dérivées y sont également nulles. De ces propriétés résulte expérimentalement l'obtention de bonnes images pour la zone de l'objet avoisinant $u = 0$.

Nous pouvons chercher à réaliser des conditions du même ordre pour le système Σ perturbé, c'est-à-dire *effectuer une correction plus ou moins poussée en un point déterminé du plan objet* pour lequel on prendra tout naturellement celui dont l'image se forme au milieu de l'écran d'observation.

16. Propriétés optiques des systèmes correcteurs.

Il nous faut d'abord connaître les propriétés optiques des lentilles correctrices elles-mêmes, placées dans l'instrument Σ .

Nous prendrons l'une d'elles, Σ' , et désignerons par $F_0(z), F_1(z), F_2(z), \dots$ les *fonctions composantes du potentiel correctif* dû à Σ' dans l'association globale $\Sigma, \Sigma', \dots$; il s'agira donc de potentiels scalaires électrique ou magnétique. Sauf indication contraire, les expressions et calculs seront donnés dans le cas électrique; le deuxième cas conduit à des développements analogues.

En ce qui concerne Σ lui-même et les autres systèmes correcteurs, s'il en existe, ils n'interviendront explicitement dans les formules que par leur composante électrique d'ordre zéro, notée $\Phi_0(z)$.

L'origine o sera prise dans Σ' , de sorte que $\Phi_0(o)$ est le potentiel préexistant dans la région correspondante.

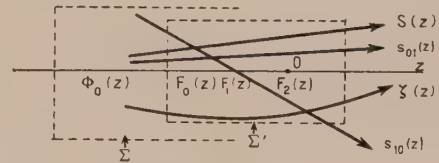


Fig. 20.

La présence de Σ' introduit dans l'équation générale des trajectoires les quantités

$$(83) \quad \begin{cases} \{F_0 s\} = F_0 s'' + \frac{F_0'}{2} s' + \frac{F_0''}{4} s, \\ \{F_0 s^3\} \\ \{F_1\} = -\frac{F_1}{2}, \quad \{F_1 s^2\}, \quad \{F_2 s\}, \quad \dots \end{cases}$$

En raison de l'ordre de grandeur de $F_0(z)$ relativement à $\Phi_0(z)$, nous trouvons là des termes purement correctifs, abstraction faite de $\{F_1\}$; on pourra donc déterminer leur contribution optique à l'aide des formules approchées utilisées pour les aberrations. Les intégrales qui y figurent sont limitées à la zone d'action même des potentiels correcteurs $F_0(z), \dots$ et les calculs se simplifient : on appliquera les relations du type (49) et (50) dans lesquelles : le potentiel $\Phi_0(z) = \Phi_0(o)$ constant, les trajectoires

particulières $S(z)$, $s_{01}(z)$, $s_{10}(z)$ sont rectilignes [mais non pas $\zeta(z)$ qui dépend de $\{F_1\}$]:

$$(84) \quad \begin{cases} S(z) = S(0) + z S'(0), \\ s_{01}(z) = s_{01}(0) + z s'_{01}(0), \\ s_{10}(z) = s_{10}(0) + z s'_{10}(0). \end{cases}$$

TERME D'AG. : $\{F_0 s\} + \{F_1\}$: EFFET DÉVIATEUR DE Σ' . — Ces termes représentent la contribution de Σ' dans la formule d'AG. de l'association Σ , Σ' ,

D'après leur structure ils correspondent respectivement à des *modifications de la convergence et de l'effet déviateur du système optique*.

1. En ce qui concerne l'effet de convergence, il fait intervenir uniquement l'équation homogène, ie

$$\{F_0 s\} + \{F_0 s\} = 0.$$

Si l'on cherche à l'obtenir à l'aide de la formule (49) appliquée à cette équation, on obtient zéro car *cette convergence additionnelle est seulement du deuxième degré en F_0* : en vertu d'une propriété connue de l'équation des trajectoires sous la forme donnée par Picht [15], elle est, en effet, de signe constant. Le calcul classique des lentilles « faibles » détermine directement la distance focale f de la lentille actuelle $F_0(z)$

$$(85) \quad \frac{1}{f} = \frac{3}{16[\Phi_0(0)]^2} \int F_0'^2 dz.$$

Des observations analogues s'appliquent aux correcteurs magnétiques : rappelons que Scherzer [16] établit pour les lentilles magnétiques une équation semblable à celle de Picht.

Au point de vue pratique, la nullité de la convergence de Σ' (en première approximation) se traduit par l'avantage suivant : le réglage des tensions appliquées à Σ' en vue d'effectuer des corrections d'aberrations, n'introduit *aucun dérèglement du plan de mise au point*, du moins s'il est maintenu dans certaines limites.

Corrélativement, on aurait pu, *a priori*, chercher à faire appel à une lentille correctrice à symétrie de révolution (diaphragme percé d'une ouverture circulaire centrée) en vue d'effectuer le réglage de la mise au point sur l'écran d'observation. On voit que c'est impossible à l'aide des systèmes Σ' du type envisagé, c'est-à-dire plongés dans une région de champ nul; ce genre de réglages ne peut, par suite, être obtenu qu'avec un potentiel correctif appliqué à une pièce située dans un champ de l'instrument, c'est-à-dire *dans une lentille de Σ* .

2. Au point de vue de l'AG., la seule action de Σ à retenir est, en définitive, l'effet déviateur dû à $\{F_1\}$; Σ' *équivalent à un prisme de petit angle*.

Le déplacement d subi par l'image est

$$(86) \quad d = \gamma \mathcal{L} \{F_1\} = -\frac{\gamma}{2\Phi_0(0)} \int [S(0) + z S'(0)] \bar{F}_1 dz.$$

Au lieu de d , on peut considérer *la déviation δ subie par les rayons*; δ s'obtient immédiatement à partir de l'équation

$$(87) \quad \begin{cases} \{F_0 s\} + \{F_1\} = 0, \\ \delta = \frac{1}{2\Phi_0(0)} \int \bar{F}_1 dz. \end{cases}$$

Pour un Σ' magnétique, les expressions seraient les suivantes :

$$(88) \quad \begin{cases} d = -\frac{i\eta\gamma}{\sqrt{\Phi_0(0)}} \int [S(0) + z S'(0)] \bar{F}_1 dz, \\ \delta = \frac{i\eta}{\sqrt{\Phi_0(0)}} \int \bar{F}_1 dz. \end{cases}$$

Ce sont là sous forme complexe des formules de systèmes déviateurs d'oscillographes.

Soit le vecteur champ créé par le système Σ' le long de Oz; $\bar{F}_1(z)$ définit au signe près sa composante transversale. Si l'argument de cette fonction complexe conserve la même valeur, c'est-à-dire *si le champ, en tout point de Oz, reste toujours contenu dans un même plan méridien*, toute trajectoire située dans ce plan s'y maintient lors de la traversée de Σ' , d'où il résulte que les droites supports incident et émergent se coupent. La forme générale des intégrales de l'équation des trajectoires montre aisément que cette propriété s'étend aux autres trajectoires : moyennant l'hypothèse précédente concernant $\bar{F}_1(z)$, *les droites supports incident et émergent de chaque rayon se coupent; en outre, le lieu des intersections est un plan perpendiculaire à Oz*.

C'est là une propriété connue des systèmes de deux électrodes à plan de symétrie passant par Oz [17]; le plan ainsi défini, dit *plan principal de déviation*, facilite les constructions géométriques. La condition sera également remplie pour tout système en étoile admettant un plan de symétrie Π passant par Oz, quelles que soient les excitations des électrodes. On sait, en effet, que ces dernières n'agissent sur $\bar{F}_1(z)$ que par l'intermédiaire d'un coefficient indépendant de z [relations (12), (13), (14)]. Par suite, $\bar{F}_1(z)$ reste toujours contenu dans un même plan méridien, car il en est évidemment ainsi lorsque les excitations respectent la symétrie, le plan méridien étant alors Π lui-même.

ABERRATIONS DUES A $\{F_0 s^3\}$. IRRÉDUCTIBILITÉ DES ABERRATIONS DE RÉVOLUTION DE Σ . — En vertu de l'ordre de grandeur de $F_0(z)$, le terme $\{F_0 s^3\}$ ne joue aucun rôle, il est masqué par exemple par $\{\Phi_0 s^3\}$, sauf peut-être pour certaines positions extrêmes de Σ' . Soit en effet, le microscope, et disposons Σ' dans la région de l'image finale : la fonction $s_{10}(z)$ est alors sensiblement plus grande dans l'aberration $\{F_0 s^3\}$ que dans celle $\{\Phi_0 s^3\}$ (zones de l'objectif et de la lentille de projection) (fig. 21); on peut s'attendre à ce que la différence d'ordres de grandeur entre F_0 et Φ_0 soit compensée en ce qui concerne les expressions faisant intervenir des puissances de $s_{10}(z)$, en premier lieu la distorsion.

Nous précisons ce point en envisageant les composantes de révolution (52) de l'aberration due à $\{F_0 s^3\}$; elles sont données par les termes homogènes du troisième degré en $u, \bar{u}, v, \bar{v}$ dans l'expression (49), c'est-à-dire

$$\gamma \mathcal{L} \mathcal{A}[us_{10} + vs_{01}], \quad \text{où } \mathcal{A} = \{F_0 s^3\}.$$

Le calcul effectué sans difficultés montre que ces composantes sont nulles.

Les Σ' magnétiques conduisent au même résultat. Autrement dit, les lentilles correctrices ne peuvent modifier les aberrations de révolution du système Σ : les expressions classiques (52) pour l'ensemble $\Sigma, \Sigma', \dots$ sont données uniquement par $\{\Phi_0 s^3\}$, c'est-à-dire par la structure du système idéal Σ_0 .

En conséquence, s'il arrive qu'à l'aide de correcteurs, on rende au plan image P' de Σ la symétrie de révolution détruite par la présence d'écarts, on y trouvera les aberrations mêmes du système Σ_0 , sans pouvoir les réduire.

De plus, la représentation optimum de la région entourant le point objet $u = 0$ est fournie précisément par ce cas où seules existent les aberrations (52) de Σ_0 .

En effet, toute autre éventualité en diffère par un ou plusieurs termes qui diminuent manifestement le nombre de dérivées des aberrations qui s'annulent pour $u = 0$ et augmentent de ce fait les défauts au voisinage; si l'on prend par exemple w_a , la condition $\frac{\partial w_a}{\partial u} = 0$ n'est remplie que pour $w_a = \gamma A_1 u^2 \bar{v}$.

Si l'on veut agir sur les termes de révolution, il est donc nécessaire, soit que Σ' se trouve dans la zone de champ non nul d'une lentille, soit que le calcul de son action nécessite une approximation plus poussée que celle conduisant à la relation (49) : cette dernière éventualité n'est réalisée que si l'effet de Σ' ne peut pas être considéré comme étant simplement correctif. Autrement dit, on ne parvient

à modifier les aberrations de révolution de Σ qu'en agissant sur les lentilles elles-mêmes ou en ajoutant des lentilles nouvelles [4], [18]. Rappelons à ce sujet que suivant Scherzer [16], l'aberration de sphéricité ne peut jamais être annulée.

ABERRATIONS DE DÉCENTRAGE $\{F_1 s^2\}$. — Ces défauts ont, *a priori*, la forme générale [relations (53) à (57)], à condition d'en supprimer les termes de révolution :

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Déformation :} \\ \Delta = \frac{2}{\gamma} \frac{\partial w_d}{\partial u} = 2(D_2 u + D) \text{ (signe } \parallel \text{ omis).} \\ \text{Courbure du champ :} \\ w_c = \gamma(C_2 u + \bar{C}_2 \bar{u} + C)v. \\ \text{Astigmatisme :} \\ w_a = \gamma(A_2 u + A)\bar{v}. \\ \text{Coma :} \\ w_k = \gamma(K v^2 + 2\bar{K} v \bar{v}). \end{array} \right.$$

En vue d'obtenir des résultats simples, nous n'envisagerons, par la suite, que les cas de lentilles Σ' placées en des régions où les trajectoires $S(z)$ et $s_{01}(z)$ sont presque parallèles à Oz; ils présentent d'ailleurs une importance particulière (dans le microscope : espaces intermédiaire et image) (fig. 21). On se

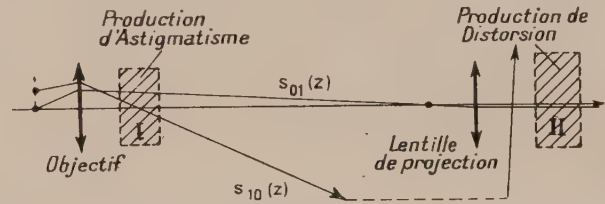


Fig. 21.

bornera dans ces conditions à évaluer la partie principale des aberrations de décentrage en supposant, en outre,

$$\Phi_0(\alpha) = \Phi_0(0).$$

a. A cet effet, les pentes $S'(0)$, $s'_{01}(0)$ sont traitées comme des termes infiniment petits négligés dans une première approximation.

Par intégration par parties, l'expression $\int \{F_1 s^2\} dz$ se simplifie

$$\begin{aligned} & \int \left[\frac{\bar{F}_1}{2} s s'' + \frac{\bar{F}_1}{4} s s' + \frac{\bar{F}_1^2}{8} s \bar{s} \right. \\ & \quad \left. + \frac{F_1}{4} (2 s s'' + s'^2) + \frac{F_1}{4} s s' + \frac{F_1^2}{16} s^2 \right] dz \\ & = \frac{1}{8} \int [\bar{F}_1 (\bar{s} s'' + 3 \bar{s} s') + F_1 (3 s s'' + s'^2)] dz. \end{aligned}$$

En vertu de (49), l'aberration est, à un coefficient près, égale à cette quantité où l'on remplace s par

$$u(s_{10}(o) + z s'_{10}(o)) + (v + v_0 - \zeta(d)) s_{01}(o) + \zeta$$

Elle s'écrit ainsi $[\zeta(z)]$ vérifie l'équation différentielle (87) dans le champ d'intégration]

$$\begin{aligned} \frac{\gamma S(o)}{\Phi_0(o)} \int \frac{F_1 \bar{F}_1}{4 \Phi_0(o)} [u(s_{10}(o) + z s'_{10}(o)) \\ + (v + v_0 - \zeta(d)) s_{01}(o) + \zeta] \\ + \frac{3}{16} \frac{(\bar{F}_1)^2}{\Phi_0(o)} [\bar{u}(\quad) + (\bar{v} + \bar{v}_0 - \bar{\zeta}(d)) s_{01}(o) + \bar{\zeta}] \\ + \frac{1}{4} F_1 [u s'_{10}(o) + \zeta']^2 dz, \end{aligned}$$

d'où les parties principales des coefficients suivants :

1^o Déformation :

$$(90) \quad 2D = \frac{3}{8} \frac{S(o)}{[\Phi_0(o)]^2} \int [s_{10}(o) + z s'_{10}(o)] (\bar{F}_1)^2 dz.$$

2^o Courbure du champ :

$$(91) \quad \gamma C v = \gamma \left[\frac{[S(o)]^2 s'_{01}(a)}{4 [\Phi_0(o)]^2} \int F_1 \bar{F}_1 dz \right] v.$$

3^o Astigmatisme :

$$(92) \quad \gamma A \bar{v} = \gamma \left[\frac{3}{16} \frac{[S(o)]^2 s'_{01}(a)}{[\Phi_0(o)]^2} \int (\bar{F}_1)^2 dz \right] \bar{v}.$$

Le calcul des autres coefficients D_3, C_2, A_2, K de (89) nécessite l'intervention des pentes $s'_{01}(o), S'(o)$; la forme des termes où ils figurent montre, du reste, que leur obtention résulte des deux seuls éléments :

$$\frac{F_1^1}{4} \bar{s} s' + \frac{\bar{F}_1^2}{8} s \bar{s}.$$

On trouve ainsi, en tenant compte de $s'_{01}(o)$ et $S'(o)$ au premier degré :

$$(93) \quad 2D_3 u = \left[\frac{S'(o) s'_{10}(o)}{2 \Phi_0(o)} \int [s_{10}(o) + z s'_{10}(o)] \bar{F}_1 dz \right] u,$$

$$(94) \quad \gamma C_2 u v = \gamma \left[\frac{S'(o) s_{01}(o) s'_{10}(o)}{4 \Phi_0(o)} \int F_1 dz \right] u v.$$

Tirons les conclusions des relations obtenues. En première approximation, les aberrations de décentration se réduisent à une déformation, une courbure du champ et un astigmatisme indépendants de u , c'est-à-dire affectant de la même manière les divers points objets : (90), (91), (92). Il est possible, par un choix convenable de la fonction $F_1(z)$ d'annuler la première et la troisième composante : l'astigmatisme par exemple si $\int (F_1)^2 dz = 0$. Au contraire, la courbure du champ ne peut s'annuler si $F_1(z)$

n'est pas identiquement nul, ce qui d'ailleurs ne présente aucune importance puisqu'une « courbure du champ » uniforme n'a pratiquement qu'une existence fictive.

En deuxième approximation, c'est-à-dire au cas où les valeurs de $S'(o)$ et $s'_{01}(o)$ seraient assez fortes pour qu'on ait à en tenir compte au premier degré, la courbure du champ et la déformation ne sont pas indépendantes du point objet : (93), (94). L'existence de coma et de variation de l'astigmatisme se manifeste par des termes encore plus faibles, exigeant une approximation plus poussée.

Un correcteur magnétique donne des résultats équivalents. L'accolade à considérer est ici

$$\{\sqrt{\Phi_0} F_1 s^2\} = \frac{i\eta}{2} \sqrt{\Phi_0} \left(F_1^1 s s' + \bar{F}_1^1 \bar{s} s' + \frac{F_1^2}{4} s^2 + \frac{\bar{F}_1^2}{2} s \bar{s} \right)$$

et nous nous contenterons de donner l'expression du coefficient d'astigmatisme correspondant à celui (92) du cas électrique

$$(95) \quad \gamma A \bar{v} = \gamma \left[\frac{\eta}{4} \frac{[S(o)]^2 s'_{01}(a)}{\Phi_0(o)} \int (\bar{F}_1)^2 dz \right] \bar{v}.$$

ABERRATIONS D'ELLIPTICITÉ $\{F_2 s\}$. — Rappelons qu'elles se réduisent à une déformation et un astigmatisme indépendants de la position de l'objet; les expressions en sont, si l'on néglige encore les quantités $S'(o), s'_{01}(o)$,

$$(96) \quad 2D = -\frac{1}{2} \frac{S(o)}{\Phi_0(o)} \int [s_{10}(o) + z s'_{10}(o)] \bar{F}_2 dz.$$

$$(97) \quad \gamma A \bar{v} = \gamma \left[-\frac{1}{4} \frac{[S(o)]^2 s'_{10}(a)}{\Phi_0(o)} \int \bar{F}_2 dz \right] \bar{v}.$$

ABERRATIONS DE DISSYMMÉTRIE D'ORDRE $m > 2$: $\{F_3 s^2\}$. — *A priori*, la raison pour laquelle ce type de défauts n'apparaît pas dans l'instrument Σ n'existe pas ici pour Σ' : suivant la structure de ce système, la composante F_3 peut être bien supérieure à F_2 et, par suite, l'aberration correspondante peut intervenir au même titre que celle provenant de $\{F_1 s^2\}$. Son expression est, d'après (43),

$$\gamma \left[-\frac{1}{16 \Phi_0(o)} \int S [\bar{u} s_{10} + (v + \bar{v}_0 - \bar{\zeta}(d)) s_{01} + \bar{\zeta}]^2 \bar{F}_3 dz \right].$$

Les résultats sont d'espèces différentes de ceux rencontrés pour $\{F_1 s^2\}$ et $\{F_2 s\}$: déformation et astigmatisme dépendant de u , terme en $\bar{v}^2$.

17. Systèmes correcteurs simples.

CONDITIONS A REMPLIR. — Nous appliquerons ce qui précède à la détermination de quelques types de systèmes correcteurs. Il est naturel d'exiger de

ces derniers pour des raisons de commodité que leurs diverses actions optiques soient réglables indépendamment; nous ne ferons appel d'autre part qu'à des Σ' dont la composante $F_3(z)$ est nulle ou du moins assez faible pour ne pas donner d'effet décelable. En tenant compte de l'hypothèse concernant les pentes $S'(o)$, $s'_{o1}(o)$, on voit que les actions optiques de Σ' se réduiront ainsi à :

- un déplacement d dû à $F_1(z)$;
- un astigmatisme A et une déformation ${}_2D$ indépendants du point objet dûs à $F_1(z)$ et $F_2(z)$.

Ces dernières quantités sont formées respectivement par les expressions (90), (92), (96), (97). Celles relatives à F_1 sont du troisième degré, celles relatives à F_2 du deuxième degré par rapport aux grandeurs « infiniment petites »; on observe du reste que l'on passe simplement des premières aux secondes en échangeant les fonctions $-\frac{3}{4}\frac{(F_1)^2}{\Phi_0(o)}$ et F_2 .

Conformément à cette remarque, les applications montreront que les aberrations dues à F_1 sont négligeables dans un grand nombre de cas; elles sont masquées par celles de F_2 sauf si $F_1 \gg F_2$; celles dues à F_3 (également du troisième degré) seront inapparentes dans les mêmes conditions.

Sous les réserves précédentes, nous voyons, en définitive, que $F_1(z)$ crée le déplacement et $F_2(z)$ les aberrations : la spécialisation des réglages exigera des composantes $F_1(z)$ et $F_2(z)$ obtenues indépendamment.

Les formules montrent, de plus, que l'aberration de Σ' se spécialise à son tour suivant la position de Σ' dans l'instrument Σ . Chez un microscope (schématisé figure 21), cette aberration se réduit pratiquement à l'astigmatisme si Σ' est placé dans la région (I) où $s_{10}(z)$ est faible; elle se réduit au contraire à la déformation s'il est placé dans la région (II) où cette fonction présente des valeurs importantes alors que $S(z) \neq 0$.

Il en résulte la possibilité de réglages indépendants pour chacune des trois actions optiques réalisables : déplacement, astigmatisme et déformation, définies par les quatre vecteurs du plan complexe d , A , ${}_2D$.

Σ' A DEUX ÉLECTRODES. — Chaque réglage étant déterminé par deux paramètres : amplitude et orientation, sera réalisé au mieux à l'aide d'un système de deux électrodes X , Y portées à des tensions appropriées φ_X , φ_Y . Considérant le déplacement d pour fixer les idées, il s'écrit, en raison de son expression linéaire : $d = \varphi_X d_X + \varphi_Y d_Y$. Posons

$$\varphi_X = \lambda \cos \omega, \quad \varphi_Y = \lambda \sin \omega;$$

le réglage sera particulièrement commode s'il est fourni par

$$(98) \quad \begin{array}{|l|l|} \hline \text{Amplitude} & |d| = k\lambda \\ \hline \text{Orientation} & \arg d = \omega + k' \\ \hline \end{array} \quad (k, k' \text{ constantes}).$$

Il suffit, à cet effet, que les vecteurs d_X , d_Y , c'est-à-dire représentatifs des déplacements pour les tensions appliquées $(1, 0)$, $(0, 1)$ soient égaux et perpendiculaires (fig. 22).

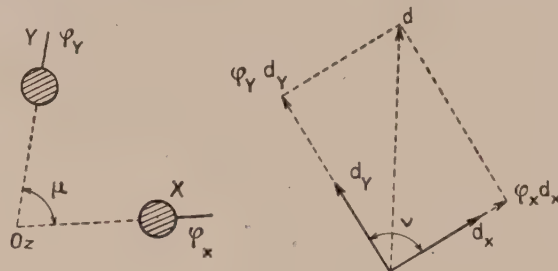


Fig. 22.

Observations analogues en ce qui concerne A (§ 14) et D .

Ces conditions sont faciles à réaliser : les diverses quantités envisagées ont des structures du type $\int h \bar{F}_m dz$ ou $\int h (\bar{F}_1)^2 dz$ (h , fonction indépendante de Σ') et la mise à profit des propriétés de variances des potentiels F_m conduit aux résultats que l'on va passer en revue.

Nous prendrons le cas où les deux électrodes X , Y admettent un plan de symétrie passant par Oz et se déduisent l'une de l'autre par une rotation d'angle μ autour de cet axe. Si nous raisonnons toujours sur la déviation, il est clair que les deux vecteurs d_X et d_Y ont même longueur : $|d_X| = |d_Y|$. Considérons leur angle $\nu = (d_X, d_Y)$, l'on a $\nu = 0$ pour $\mu = 0$, $\nu = \pi$ pour $\mu = \pi$ (X , Y directement opposés et portés à la même tension donnent $d = 0$); quand μ varie de façon continue de zéro à 2π , il en est de même de ν . Il existera donc bien certaines dispositions relatives de X , Y telles que d_X et d_Y soient perpendiculaires. Dans la mesure où l'on peut négliger les influences mutuelles entre X , Y , c'est-à-dire assimiler la distribution de potentiel à la somme de deux distributions créées chacune par une électrode « isolée », l'on a $\nu = \frac{\pi}{2}$ pour $\mu = \frac{\pi}{2}$; en raison des phénomènes d'influence que l'on peut estimer pour des sphères la valeur adéquate de μ est un peu inférieure.

Le système ainsi défini (fig. 22) n'est toutefois pas purement déviateur en raison de l'existence d'une composante F_2 . Substituons à chaque électrode une électrode comprenant deux éléments formant un

énumérées et dont les avantages principaux sont de fournir des *actions optiques rigoureusement spécialisées et calculables* et d'être *blindés vis-à-vis des champs parasites*.

Soit une répartition de potentiel $f(z, r, \theta)$ de composantes $F_m(z)$ à l'intérieur d'un cylindre C d'axe Oz et de rayon R ; on la suppose déterminée par la connaissance du potentiel en tout point de ce cylindre, soit $f(z, R, \theta)$.

Les valeurs des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_m dz$ peuvent s'obtenir aisément (nous admettons qu'elles sont finies ce qui implique, en particulier, la nullité du potentiel à l'infini).

Considérons à cet effet la fonction de r, θ , définie par $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z, r, \theta) dz$; on vérifie qu'elle obéit à l'équation de Laplace dans le domaine des deux variables r et θ . Elle peut, par suite, s'écrire sous forme d'une partie réelle de fonction holomorphe en s ; l'intégration du développement (4) de $f(z, r, \theta)$ le confirme du reste et fournit, de plus, les valeurs des coefficients en fonction des F_m :

$$(101) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z, r, \theta) dz = \sum_0^{\infty} b_m s^m + \bar{b}_m \bar{s}^m, \\ b_m = \frac{1}{2^m m!} \int_{-\infty}^{+\infty} F_m dz. \end{cases}$$

Les intégrales envisagées apparaissent ainsi dans les coefficients $b_m, \bar{b}_m$ d'une série de Fourier en θ ; une intégration classique par rapport à cette variable les exprime en fonction des valeurs du potentiel sur C :

$$(102) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}_m dz = \frac{2^{m-1} m!}{\pi R^m} \iint f(z, R, \theta) e^{im\theta} dz d\theta.$$

Nous réaliserons des systèmes Σ' cylindriques en disposant les électrodes correctrices suivant des portions rectangulaires de la surface C , le reste de cette surface étant occupée par un tube conducteur porté au potentiel zéro.

Les calculs des expressions (102) sont alors très simples; en raison de l'intégrale, on peut ne pas y tenir compte de l'existence nécessaire de bandes isolantes entre les diverses parties conductrices, à condition que ces bandes chevauchent de façon symétrique les lignes de séparation théorique.

On prendra des exemples chez les Σ' cylindriques à deux électrodes X, Y (tensions φ_X, φ_Y). Si X et Y se déduisent l'une de l'autre par décalage angulaire μ

autour de Oz , il en est de même des lois de potentiel créées par les tensions appliquées $(1, 0)$ et $(0, 1)$; les relations de réglage de la forme (98) exigeant des vecteurs $d_X, d_Y, \dots$ perpendiculaires sont, par suite, *rigoureusement vérifiées ici pour des valeurs simples* de μ , telles que $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$; nous savons qu'il n'en est pas de même en général chez les autres montages en raison des influences électriques mutuelles.

On supposera chaque Σ' placé dans les conditions d'application numérique du paragraphe 14 : microscope à la sortie de l'objectif :

$$\Phi_0(0) = 50\,000 \text{ V}; \quad f = 5 \text{ mm}; \quad \alpha = 3 \cdot 10^{-3}; \quad \gamma = 10^4,$$

rayon de $C, R = 5 \text{ mm}$; longueur des électrodes X, Y suivant $Oz, L = 10 \text{ mm}$.

On se donnera les tensions correctrices, ou, plus exactement, $\sqrt{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2} = 100 \text{ V}$; les relations (102) permettront de calculer le déplacement d et la limite de résolution ϖ de l'astigmatisme de Σ' .

a. X et Y juxtaposées et occupant chacune un domaine angulaire $\frac{\pi}{2}$ (fig. 24 a). — 1° Déplacement : (98) s'applique

$$|d| = \frac{L}{\sqrt{2}\pi R} \gamma f \frac{\sqrt{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2}}{\Phi_0(0)} = 45 \text{ mm}.$$

2° Astigmatisme dû à $F_1(z)$ [éq. (92)] : il exige la connaissance de l'intégrale $\int (\bar{F}_1)^2 dz$ que l'on remplacera par $\frac{1}{L} \left[\int \bar{F}_1 dz \right]^2$ en vue d'une évaluation approchée

$$\varpi \neq 0,38 \frac{L}{R^2} f^2 \frac{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2}{[\Phi_0(0)]^2} \alpha = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m } \mu \quad (\text{négligeable}).$$

3° Astigmatisme dû à $F_2(z)$ [éq. (97)] : les vecteurs d'astigmatisme correspondant respectivement aux tensions $(1, 0), (0, 1)$ sont ici directement opposés de sorte que cet astigmatisme est d'orientation fixe et ϖ est fonction de $\frac{\varphi_X - \varphi_Y}{\Phi_0(0)}$. On trouve

$$\varpi = \frac{L}{\pi R^2} f^2 \frac{|\varphi_X - \varphi_Y|}{\Phi_0(0)} \alpha.$$

Les données numériques actuelles ne suffisent pas à déterminer ϖ ; sa valeur maximum possible (obtenue pour $\varphi_X = 50\sqrt{2} \text{ V}, \varphi_Y = -50\sqrt{2} \text{ V}$) est $\varpi = 30 \text{ m } \mu$.

La suppression de cette aberration s'obtiendrait par le montage correspondant à la figure 23 a.

b. *Électrodes XX, YY juxtaposées comprenant chacune deux segments directement opposés, de domaine angulaire $\frac{\pi}{4}$ (fig. 24 b).* Il s'agit du dispositif purement aberrateur de la figure 23 b.

Astigmatisme : (98) s'applique

$$\varpi = \frac{\sqrt{2}L}{\pi R^2} f^2 \frac{\sqrt{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2}}{\Phi_0(0)} \alpha = 30 \text{ m}\mu,$$

(cf, application numérique du paragraphe 14).

Seule, l'aberration sphérique est en général observable; elle est en effet prépondérante dans la région centrale du champ soumise à l'examen (u limité à quelques microns). L'astigmatisme et la courbure apparaîtraient pour des écarts de l'axe plus grands; on peut admettre enfin que le coma serait toujours masqué. Ainsi que nous le vérifierons en lieu utile, cette dernière propriété se retrouve encore chez un microscope à symétrie axiale perturbée; *seuls, l'astigmatisme et la courbure du champ provenant des*

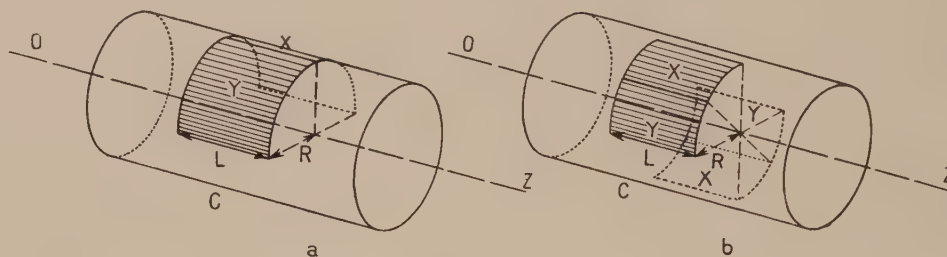


Fig. 24.

Évaluons ici la déformation ${}_2D$: $F_2(z)$ étant une fonction paire en z , la relation (96) se réduit à une intégrale $\int \bar{F}_2 dz$, d'où l'on tire

$${}_2D = \frac{2\sqrt{2}L}{\pi R^2} f s_{10}(0) \frac{\sqrt{\varphi_X^2 + \varphi_Y^2}}{\Phi_0(0)} = 4 \cdot 10^{-2},$$

si l'on suppose $s_{10}(0) = 10$.

Une telle déformation est peu sensible et nous vérifions bien que le système peut être considéré comme créant seulement un astigmatisme.

CORRECTEURS INTERNES. — On peut également imaginer des Σ' disposés dans le champ des lentilles. Dans ce cas, la correction ne nécessite pas que l'on agisse sur les tensions des électrodes; elle peut se réaliser en modifiant leurs positions et l'absence de source de tension auxiliaire constitue évidemment un avantage. L'introduction d'électrodes dans les lentilles peut, toutefois, être malaisée et le réglage de leurs positions ne présentera ni la commodité, ni la souplesse du réglage des tensions des correcteurs « externes ».

18. Exemples de systèmes corrigés.

Nous appliquerons au microscope électronique les données précédentes en rappelant tout d'abord quelques points concernant les aberrations géométriques affectant la netteté de l'instrument « idéal » [4].

écarts sont susceptibles de nuire effectivement à la netteté des images.

En vertu des relations (54) et (55), l'élimination de ces deux défauts (du moins celle de leur partie réductible) nécessite celle de trois quantités complexes

$$C_2 = A_2 = A = 0.$$

On peut, par suite, s'attendre à ce qu'elle soit assurée, en théorie, à l'aide d'un système correcteur Σ' déviateur et producteur d'astigmatisme et si, de plus, v_0 est réglable, cet ensemble fournissant le nombre nécessaire de paramètres. Dans le cas où la limitation de l'ouverture des faisceaux est due au dispositif éclairant lui-même le réglage de v_0 s'obtient par celui de l'orientation de ce dispositif. En fait, il n'est pas nécessaire de satisfaire strictement aux conditions précédentes, il suffit d'évaluer approximativement les limites de résolution des aberrations en question et de faire en sorte qu'elles restent nettement inférieures à celle de l'aberration sphérique.

En vue de résultats simples, on prendra un microscope formé de deux lentilles identiques : objectif L , lentille de projection L' , chacune strictement de révolution par rapport à son axe optique propre, le diaphragme d'ouverture D étant centré sur l'objectif et placé dans son plan focal image. L'écart consiste en un léger décalage entre les axes des lentilles supposées minces pour la clarté des figures (hypothèse sans répercussion sur les résultats).

On peut ne pas tenir compte des ellipticités éven-

tuelles; elles ne fournissent, en effet, qu'un surplus d'astigmatisme corrigé par Σ' .

On se bornera, dans les évaluations numériques, à l'astigmatisme car la courbure est d'expression mathématique assez voisine pour conduire aux mêmes conclusions.

On admettra les valeurs suivantes :

Distance focale de chaque lentille.....	$f = 5 \text{ mm}$
Grandissement de chaque lentille.....	$g = 10^2$
(Grandissement total = 10^4).....	
Ouverture.....	$\alpha = 3.10^{-3}$
Diamètre du champ image observé 6 cm.	$ u \leq 3\mu$

Le pouvoir séparateur dû à l'aberration sphérique se ramène comme on le sait à une expression de la forme

$$(103) \quad \varpi_{\sigma} = B f \alpha^3,$$

où B est un coefficient sans dimensions de l'ordre de quelques unités. Supposons que l'on ait, par exemple, $B = 10$ (lentille électrostatique [3]), nous trouvons ainsi

$$\varpi_{\sigma} = 1,5 \text{ m}\mu.$$

a. LIMITE DE RÉOLUTION DANS L'INSTRUMENT NON CORRIGÉ. — L'axe auquel est rapporté l'instrument sera la droite joignant les centres optiques (désignés également par L, L'). Soient τ et τ' les angles que font avec lui les axes optiques de L et L' respectivement; ces deux grandeurs sont complexes conformément aux conventions générales et caractérisent complètement l'écart de Σ vis-à-vis de son état idéal.

La relation (49) donne l'astigmatisme de l'instrument sous une forme fournissant les parts de chaque lentille

$$\varpi_a = \varpi_{aL} + \varpi_{aL'},$$

$$(\alpha = \{ \Phi_0 s^3 \} + \{ \Phi_1 s^2 \} + \{ \Phi_2 s \}).$$

En remplaçant dans l'intégrale les fonctions Φ_1, ζ, Φ_2 par leurs valeurs mettant en évidence les paramètres f, g, τ , nous faisons apparaître la structure de ϖ_a par rapport à ces derniers. Soit ϖ_{aL} ; on observe d'abord que, dans la zone de L , la fonction Φ_1 est, *a priori*, fonction linéaire des écarts, c'est-à-dire des deux quantités $\tau, \bar{\tau}$; l'examen de la variance par rotation autour de Oz précise ce point : Φ_1 est proportionnelle à τ seul; le calcul donne d'ailleurs

$$\bar{\Phi}_1 = -\tau \left(\Phi'_0 + \frac{\Phi_0^2}{2} z \right).$$

On voit de même que la fonction ζ est également proportionnelle à τ et fait intervenir $s_{01}(z)$ et $s_{10}(z)$.

Quant à $\bar{\Phi}_2$, c'est une fonction nulle au premier ordre (§ 4), donc du deuxième degré en τ et $\bar{\tau}$; la variance montre qu'elle est simplement proportionnelle à τ^2 .

La formule (49) donne, dans ces conditions,

$$(104) \quad \varpi_{aL} = g^2 f^{-2} Q(u, f\tau) \bar{v}$$

$Q(x, y)$ désigne une forme quadratique homogène dont les coefficients sont des nombres sans dimensions donnés par des expressions tout à fait analogues à celles du coefficient B de la relation (103); il s'agit d'intégrales définies faisant intervenir les fonctions Φ_0, s_{01}, s_{10} et présentant des valeurs de quelques unités. Le but était non de calculer strictement les aberrations, mais de mettre en évidence des différences entre ordres de grandeur, nous désignerons tous ces coefficients par B et prendrons $B = 10$.

L'expression de $\varpi_{aL'}$ que l'on retrouvera plus loin s'obtient de la même façon; elle est ici négligeable, sauf dans le cas peu probable où τ' serait d'un ordre de grandeur bien supérieur à τ . En conclusion, *l'aberration de décentrage est due pratiquement à l'objectif seul*

$$\varpi_a = \varpi_{aL},$$

d'où résulte une limite de résolution

$$\varpi_a = f^{-1} Q(u, f\tau) \alpha$$

c'est-à-dire pour le point $u = 0$ dont l'image est au centre du champ

$$\varpi_a = B f |\tau|^2 \alpha.$$

Application numérique pour $\tau = 10^{-2}$; $\varpi_a = 15 \text{ m}\mu$: *le décentrage limite sensiblement les qualités de netteté de Σ .*

b. ASSOCIATION' A L'INSTRUMENT D'UN CORRECTEUR Σ' A ASTIGMATISME SEUL. — Nous disposons Σ' conformément à la figure 21 (région I) et nous le réglerons de façon que son astigmatisme uniforme annule celui de Σ au centre du champ. La forme quadratique (104) se réduit, dans ces conditions, aux termes en u^2 et en $u\tau$: le décentrage se manifeste par le second, c'est-à-dire par une limite de résolution

$$(105) \quad \varpi_a = K |u\tau| \alpha$$

croissante à partir du centre jusqu'au bord du champ où elle atteint, avec les chiffres précédents ($\tau = 10^{-2}$, $u = 3\mu$), la valeur $\varpi_a = 1 \text{ m}\mu$.

Σ' apporte ainsi une grosse amélioration : *le décentrage ne limite guère la netteté que vers les bords du champ.*

ASSOCIATION A L'INSTRUMENT D'UN CORRECTEUR Σ' COMPLET. — Prenons comme axe du système de coordonnées l'axe optique Lz de l'objectif. Disposons à la sortie de ce dernier un système déviateur et « aberrateur ». Supposons-le réglé de façon que :

a. sa déviation δ fasse passer par L' le rayon dirigé initialement suivant Lz ;

b. l'astigmatisme total s'annule pour le point objet A sur Lz ($u = 0$).

Dans ces conditions, la région entourant A est reproduite sur l'écran d'observation, région vis-à-vis de laquelle l'ensemble objectif-diaphragme est centré; tout se passe comme si la lentille projective était inclinée de l'angle τ' sur l'axe OL' d'un instrument centré par ailleurs (fig. 25) : l'aberration de décen-

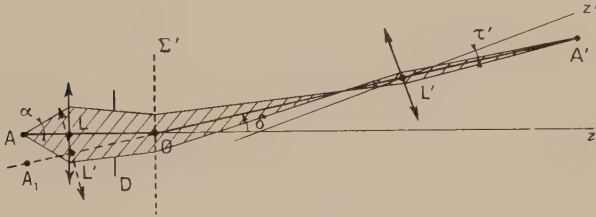


Fig. 25.

trage fait donc intervenir uniquement la contribution $\omega_{aL'}$ de L' pour laquelle un calcul analogue à celui esquissé pour l'objectif donne

$$\omega_{aL'} = f^{-2} Q(u g, f \tau') \bar{v},$$

la forme quadratique homogène $Q(x, y)$ étant pratiquement la même que dans l'équation (104). L'astigmatisme sur l'axe étant, en outre annulé, le décentrage se manifeste seulement par le terme en $u \tau'$, c'est-à-dire par la limite de résolution

$$(106) \quad \varpi_a = B g^{-1} |u \tau'| \alpha.$$

La comparaison avec (105) met en évidence une amélioration notable due au facteur g^{-1} : dans le cas actuel et en supposant que l'on ait $\tau' = \tau = 10^{-2}$, on trouve, au bord du champ, $\varpi_a = 10^{-2} \text{ m}\mu$: l'aberration de décentrage n'est plus décelable sur l'écran. Nous vérifierons, en outre ici, ce qui a été

dit précédemment du coma : le calcul en donne une limite de résolution de la forme

$$\varpi_K = B g^{-3} f |\tau'| \alpha^2$$

c'est-à-dire avec l'application numérique et en supposant toujours $B = 10$,

$$\varpi_K = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}\mu.$$

En ce qui concerne la distorsion, rappelons qu'on annule la déformation présentée au voisinage d'un point déterminé de l'image à l'aide d'un correcteur convenablement placé (région II de la figure 21); cette condition suffit pratiquement à rendre à Σ les qualités de l'instrument centré concernant la fidélité de reproduction des figures.

19. Application aux instruments à miroir.

On indiquera enfin un emploi des lentilles correctrices suggéré par P. Grivet dans un problème assez différent.

Soit un microscope à miroir, c'est-à-dire comprenant comme système de projection non une lentille, mais un miroir électronique. On sait que le repliement du faisceau sur lui-même introduit dans l'appareil des difficultés en ce qui concerne la réception de l'image définitive [20]. Il est possible d'y obvier sans que le miroir cesse de travailler comme système centré, c'est-à-dire sous l'incidence normale : il faut faire appel à cet effet à un champ magnétique déviateur dont on met à profit la propriété de fournir des trajectoires n'obéissant pas au « principe du retour inverse ». Hottenroth utilise le champ de l'entrefer d'un électroaimant [21], il s'agit bien là d'un dispositif purement déviateur (aux aberrations $\{F_1 s^2\}$ près, ainsi que le montre l'examen de ses symétries ($F_2 \equiv 0$)). L'emploi d'un champ correcteur électrique se conçoit également à condition que le miroir travaille sous une incidence légèrement oblique; le faisceau s'y réfléchit alors sous une direction différente de celle incidente et une lentille « aberratrice » disposée derrière l'objectif permettra de corriger l'astigmatisme introduit par ce décentrage.

Les systèmes Σ' favorisent ainsi l'extension à des instruments d'optique non centrés les propriétés des instruments centrés, à savoir celles de focalisation.

BIBLIOGRAPHIE.

1. F. BERTEIN, *C. R. Acad. Sc.*, 220, 1945, p. 684-686.
 2. MAGNUS et OBERHETTINGER, *Formeln und Sätze*, Berlin, 1943, p. 53.
 3. H. BRUCK, *Cahiers de Physique*, 24, 1944, p. 15.
 4. ZWORYKIN et RAMBERG, *The electron Microscope* (références).
 5. K. SCHWARZSCHILD, *Gesell. Wiss. Göttingen (Nach. Math. Phys. Klasse*, 3, 1903, p. 126-131).
 6. E. GOURSAT, *Analyse mathématique*, 3^e édition, §§ 400, 401 et 606.
 7. BUSCH et BRUCHE, *Beiträge zur Elektronenoptik*, Leipzig, 1937.
 8. P. GRIVET et H. BRUCK, *L'Onde électrique*, 231, 1946, p. 175-227.
 9. M. COTTE, *Recherches sur l'Optique électronique* (Thèse), 1938.
 10. W. GLASER, *Zeits. Phys.*, 120, 1943, p. 1-15.
 11. F. BERTEIN et E. REGENSTREIF, *C. R. Acad. Sc.*, 224, 1947, p. 737-739.
 12. J. HILLIER, *J. of Appl. Phys.*, 17, 1946, p. 307-309.
 13. W. GLASER, *Zeits. Phys.*, 80, 1933, p. 451-464.
 14. J. HILLIER et RAMBERG, *J. Appl. Phys.*, 18, 1947, p. 48-71.
 15. J. PICT, *Ann. Phys.*, Leipzig, 15, 1932, p. 926.
 16. O. SCHERZER, *Zeits. Phys.*, 101, 1936, p. 593-603.
 17. G. WENDT, *Zeits. Phys.*, 118, 1942, p. 593-617.
 18. J. HILLIER, *J. Appl. Phys.*, 17, 1946, p. 411-419.
 19. F. BERTEIN, Demande de brevet français, numéro provisoire 531.287, 13 mars 1947.
 20. H. MAHL et A. PENDZICH, *Zeits. techn. Phys.*, 24, 1943, p. 38-42.
 21. G. HOTTENROTH, *Ann. Phys.*, Leipzig, 30, 1937, p. 689-712.
-

Je suis heureux d'exprimer ma gratitude à M. Maurice Ponte, Directeur Général Adjoint de la Compagnie Générale de Télégraphie sans Fil, qui a bien voulu me donner les moyens de mener à bien cette étude dans la Division de Microscopie Électronique dirigée par M. Pierre Grivet. Je remercie également ce dernier ainsi que M. Henri Bruck d'avoir permis mon initiation aux problèmes de microscopie grâce au microscope mis au point par eux.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 novembre 1947.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

JEAN CABANNES.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

J. SARRAILH.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Théorie non linéaire du champ électromagnétique.

Vu et approuvé :

Paris, le 20 novembre 1947.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

JEAN CABANNES.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

J. SARRAILH.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins.

127508

Dépôt légal d'imprimeur, 1948, n° 380.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
127508 Quai des Grands-Augustins, 55.

Dépôt légal, imprimeur, n° 380.